Angélica Inés Pérez Ariza / Francisco Manuel Barrios Paniagua

# Geometría analítica

# Contenido

## Primer parcial

## Eje: Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico. 10



## Segundo parcial

## Eje: Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico. 56

INICIO

# Evaluación diagnóstica

**Responde las preguntas e identifica los temas de aritmética, álgebra y geometría que debes conocer para hacer un buen curso de geometría analítica.**

**1.** Utiliza las leyes de los signos para reducir las expresiones.

a. $-3(2) =$ b. $2(-3) =$ c. $-4(-2) =$

d. $-(-3) =$ e. $-(-(2)) =$ f. $-(-(-2)) =$

g. $|3| =$ h. $|-4| =$ i. $-|5| =$

**2.** Utiliza las leyes de los signos para reducir las expresiones.

a. $2 - 5 =$ b. $-9 - (-2) =$ c. $6 - (-1) =$

d. $-1 - (-3) =$ e. $-4 - 3 =$ f. $|6 + (-3)| =$

g. $\dfrac{4-(-3)}{4-3} =$ h. $\dfrac{-5-(-3)}{0-(-1)} =$ i. $\dfrac{3-(-2)}{7-17} =$

j. $(x - (-5)) =$ k. $-(-x - (-2)) =$ l. $(x + (-2)) =$

**3.** Reduce los términos semejantes.

a. $x^2 + xy + yx + y^2 =$

b. $2x^2 + 4xy - 6x + 2xy + x - yx - y^2 =$

c. $-3xy - 2yx + 6x^2 + 2y^2 - x + y - 4x - 2x^2 =$

d. $x^2 - 3y - 3 - y^2 + 7y - 3 + 3y^2 =$

e. $-3x + 2x^2 + y^2 - 2y + 6x - 2y^2 - 3y - x^2 =$

**4.** Utiliza las leyes de los exponentes para desarrollar las expresiones.

a. $(5x)^2 =$ b. $(3x^3)^2 =$ c. $(2y^2)^3 =$

d. $((-3x)^2)^3 =$ e. $(a - b)^2 =$ f. $(x - 5)^2 =$

g. $(x + 4)^2 =$ h. $(x - (-3))^2 =$ i. $(a^2 + b)^2 =$

**5.** Utiliza las leyes de los exponentes para reescribir las expresiones como el cuadrado de otra.

a. $4x^2 = (\quad)^2$ b. $9y^2 = (\quad)^2$ c. $49a^2b^2 = (\quad)^2$

d. $16y^4 = (\quad)^2$ e. $-25y^2 = -(\quad)^2$ f. $-81x^2 = -(\quad)^2$

**6.** Factoriza las expresiones.

a. $12x^2 + x =$ b. $x^2 - y^2 =$ c. $4x^2 - 25^4 =$

d. $x^2 + 2xy + y^2 =$ e. $9x^2 + 6x + 1 =$ f. $x^2 - 10x + 25 =$

7. Completa las expresiones para formar un trinomio cuadrado perfecto (TCP).

a. $x^2 +$ ______ $+ 1 = ($ $)^2$

b. $x^2 + 2xy +$ ____________ $= ($ $)^2$

c. $4x^2 -$ _____ $+ 16 = ($ $)^2$

d. $x^4 + 6x^2 +$ ____________ $= ($ $)^2$

8. Despeja la variable señalada.

a. De $4 + x = 6$ despeja $x$.

b. De $\frac{4-y}{5} = -1$ despeja $y$.

c. De $x^2 + y^2 = 9$ despeja x.

d. De $\frac{7-y_1}{9-x_1} = 6$ despeja $y_1$.

9. Resuelve los sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

10. Halla las soluciones de las ecuaciones cuadráticas.

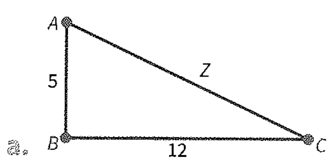
a. $x^2 - 2x = 0$

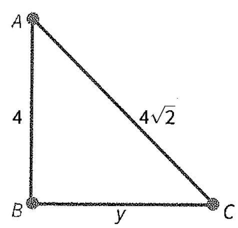
b. $x^2 - 4x - 12 = 0$

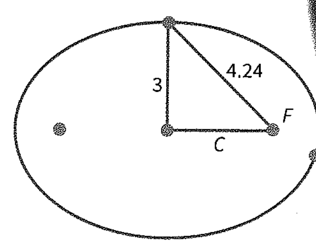
c. $x^2 + 6x + 8 = 0$

d. $x^2 - 10x + 30 = 9$

11. Aplica el teorema de Pitágoras para hallar el valor señalado.

a. 

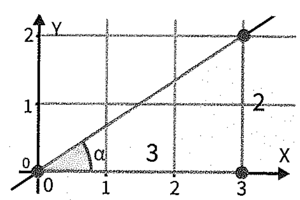

b. 


c. 

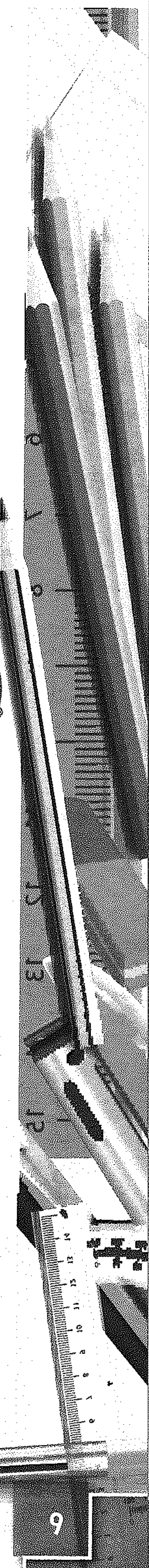

12. Responde lo siguiente.

a. ¿Cómo se define la tangente de un ángulo?

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto} \quad \rule{4em}{0.4pt}}{\text{cateto}}$$

b. 

$\tan\alpha =$ ______



**Si tuviste dificultades con alguna pregunta, te sugerimos revisar el contenido.**

| | Materia y tema | | Materia y tema |
|---|---|---|---|
| 1 y 2 | Álgebra. Leyes de los signos. | 8 | Álgebra. Despeje de variables. |
| 3 | Álgebra. Suma de términos semejantes. | 9 y 10 | Álgebra. Resolución de ecuaciones. |
| 4 y 5 | Aritmética. Leyes de los exponentes. | 11 | Geometría y trigonometría. Teorema de Pitágoras. |
| 6 y 7 | Álgebra. Factorización. | 12 | Geometría y trigonometría. Funciones trigonométricas. |

# Primer parcial

## Eje: Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.

- Sistema de referencia y localización: elementos de geometría analítica.

- La geometría analítica como método algebraico para la resolución de tareas geométricas. El tratamiento en diversos sistemas de coordenadas.
- Conceptos básicos del sistema de coordenadas rectangulares, orientación y posición en el plano. El papel del origen de coordenadas en los sistemas de referencia.

- Sistema de coordenadas cartesiano. Me oriento en el plano: ¿puedo hacer un mapa del sitio en el que vivo? ¿Qué ruta es más corta?
- Los lugares geométricos básicos: la recta y la circunferencia. ¿Cómo se construye la ecuación de la recta? ¿Cuáles son sus invariantes? Camino en línea recta, y el láser, ¿cómo lo hace? ¿Qué sabes del movimiento circular? Algunos ejemplos de la naturaleza, ¿conoces algunos?
- Otros lugares geométricos: la elipse, la parábola y la hipérbola. ¿Qué significan esas palabras?, ¿de dónde vienen, conoces su historia?
- La longitud de un segmento, el punto medio, la perpendicular a un segmento, entre otras. Intersección de rectas y demás lugares geométricos. ¿Puedes doblar un papel que deje marcado en su doblez dos segmentos perpendiculares?, ¿dos segmentos paralelos?, ¿cómo lo hiciste?

1.208

- Caracteriza de forma analítica los problemas geométricos de localización y trazado de lugares geométricos.
- Ubica en el plano —en distintos cuadrantes. Y localiza puntos en los ejes y los cuadrantes mediante sus coordenadas.
- Interpreta y construye relaciones algebraicas para lugares geométricos. Ecuación general de los lugares geométricos básicos.

- Colocar en un sistema cartesiano tres lugares de la zona en la que vivo.
- Calcular la distancia más corta entre la escuela y mi casa.
- Representar en un plano dos rectas paralelas. Encontrar sus ecuaciones.
- Dibujar en el plano dos circunferencias concéntricas, encontrar sus ecuaciones.
- Localizar una recta en el plano y bosquejar su perpendicular por un punto dado.

# Habilidades socioemocionales

## Conoce T

Para trabajar con: uno mismo/estudiantes.

Tiempo de planeación: 5 min.

Duración estimada: 10 min.

Habilidades generales en entrenamiento: determinación.

Habilidades específicas en entrenamiento: manejo del estrés.

**Las habilidades socioemocionales son fundamentales en tu vida, pues las emociones influyen en tus decisiones. Esta actividad está enfocada en ayudarte a desarrollar dichas habilidades. Pertenece al programa Construye T y puedes encontrar más en su página.**

**Para reflexionar...**

¿Te sientes continuamente abrumado o con ansiedad cuando las cosas salen de tu control? ¿En ocasiones sientes que no puedes manejar lo que te está sucediendo?

**Nuestro objetivo:**

Reconocer las sensaciones que experimentamos en momentos de estrés y aprender una técnica que te permita liberarlas.

**Condiciones y materiales deseables:**

Un espacio tranquilo sin distractores.

**Paso a paso:**

1. Cierra tus ojos e identifica en qué parte de tu cuerpo sientes tensión. Trata de maximizarla.
2. Respira profundamente y en el momento en que exhales intenta relajar esa parte de tu cuerpo.
3. Sigue respirando y mientras sientes que esa parte de tu cuerpo se relaja; imagina que ese bienestar se extiende por el resto de tu cuerpo.
4. Continúa con la atención en tu respiración y exhalación, y en cada exhalación relaja otra parte de tu cuerpo, hasta que tengas una sensación de bienestar.
5. Trata de identificar qué parte de tu cuerpo se tensa cuando sientes estrés, ¿siempre es la misma? Se sugiere llevar un registro o un diario de las emociones que desees manejar. En él puedes describir cómo te sientes, qué pensamientos o circunstancias te denotan sentir esa emoción, con la finalidad de que puedas prevenir y manejarla.
6. Apóyate también en una actividad física o en algún deporte que te permita relajarte.

**Para terminar...**

¿Cómo seré una mejor persona?, ¿cómo seremos una mejor comunidad?

El manejo del estrés nos ayuda a mejorar nuestro funcionamiento y rendimiento. Éste se logra manejando nuestras emociones y pensamientos. Para esto es fundamental mantener una actitud positiva ante situaciones externas que no podemos controlar, como el tránsito, clima, etcétera.

¡Recuerda que el ejercicio, la meditación o las técnicas de relajación pueden ayudarte a manejar el estrés!

## Proyecto de vida

**En el semestre desarrollaremos tu Proyecto de vida, con la finalidad de clarificar qué deseas para ti y tomes decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como reflexionar acerca de las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.**

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

1. Copia en tu cuaderno o en una cartulina, un cuadro similar al siguiente.
2. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Identifica si son a corto, mediano o largo plazo, así como el área a la que pertenecen. Agrega las filas necesarias. Guíate con el ejemplo.

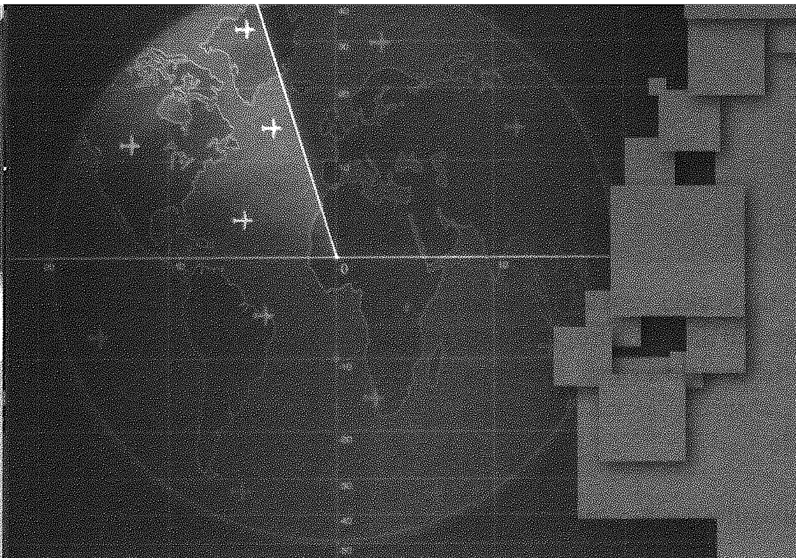
| Meta | Plazo para lograrla | Área | Beneficio personal o a mi comunidad |
|---|---|---|---|
| Aprobar mis materias con una calificación arriba de 8. | Corto plazo: primera evaluación. | Profesional | Obtener el promedio mínimo para solicitar un apoyo económico. |
| Reducir mi consumo de desechables. | Mediano plazo: semestre | Social | Reducir la cantidad de basura. |
| Correr 5 km. para mejorar mi condición física. | Largo plazo: año | Salud | Mejorar mi salud y así prevenir enfermedades. |

3. Una vez que organizaste la información en la tabla, léela con atención para que tengas un panorama de lo que implica el planteamiento de tu Proyecto de vida. Posteriormente elabora un organizador gráfico en el que detalles lo que debes hacer para lograr tus metas. Guíate con el ejemplo.

Proyecto de vida de: ______________________________

| Meta | Área | Objetivos | Acciones | Indicador | Fecha límite |
|---|---|---|---|---|---|
| Reducir mi consumo de desechables. | Social | Acostumbrarme a portar un vaso no desechable.<br>No utilizar popotes. | En reuniones, marcar mi vaso desechable para gastar sólo uno. | Número de días que porto mi vaso. | Final del semestre. |

4. Coloca este organizador en un lugar visible en tu casa. También puedes añadir imágenes y frases que te motiven a cumplir tus metas.

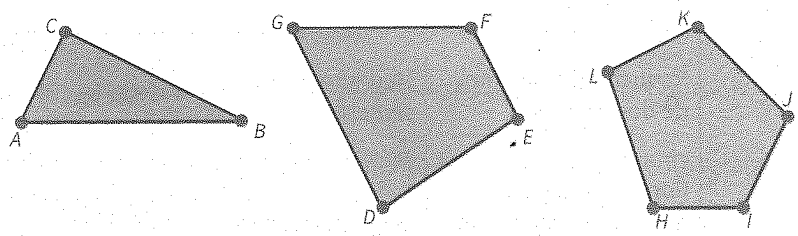


# Sistema de coordenadas cartesiano

## Puntos en el plano

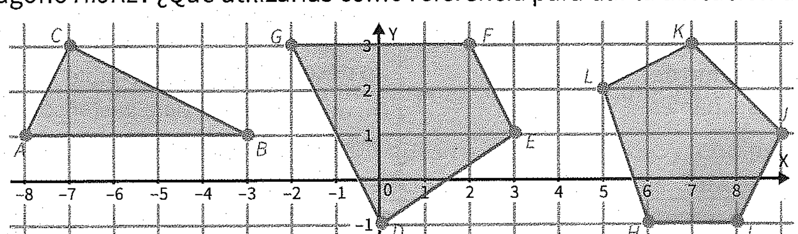
### Plano cartesiano

Comencemos observando estas figuras: un triángulo escaleno, un cuadrilátero y un pentágono irregular:




Estas figuras las estudiaste en tu curso de Geometría y trigonometría y se sitúan en un lugar llamado **plano euclidiano**. De ellas puedes decir varias cosas como cuál es la suma de sus ángulos internos, cuál la de sus ángulos externos, la cantidad de diagonales desde un vértice e incluso, si te dieran sus medidas, podrías calcular su perímetro. Sin embargo, si te preguntan en qué parte de ese plano están los vértices del triángulo *ABC* o del cuadrilátero *DEFG*, ¿podrías responder algo específico?

Ahora observa las mismas figuras pero colocando "debajo" una retícula y dos rectas perpendiculares (X y Y) con una graduación. ¿Puedes decir en dónde están los vértices del pentágono *HIJKL*? ¿Qué utilizarías como referencia para dar la ubicación de *K*?




A la retícula que añadimos, junto con las rectas perpendiculares, se le llama **plano cartesiano**. Las rectas perpendiculares reciben el nombre de **ejes de coordenadas X** y **Y** y el punto en el que se intersecan se conoce como **origen**.

**Recuerda que...**

Un triángulo escaleno tiene todos sus lados de diferente medida.

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

Un pentágono irregular es un polígono de cinco lados con al menos dos de distinto tamaño.

Las rectas perpendiculares son las que forman cuatro ángulos de 90°.

**Glosario**

Retícula.

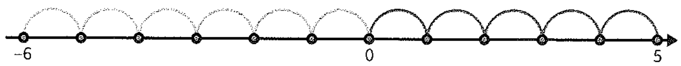
Conjunto de líneas que forman una malla o red.

**Para saber más**

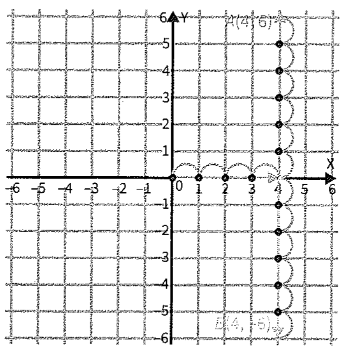
El eje X también recibe el nombre de eje de las abscisas y al eje Y se le llama eje de las ordenadas.

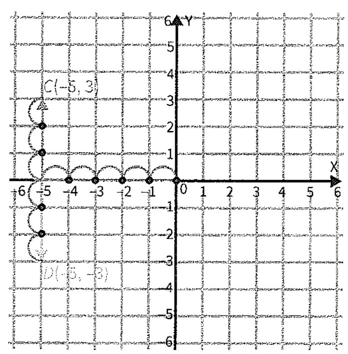
## Puntos con coordenadas enteras en el plano cartesiano

Recordemos que los **números enteros** pueden representarse como puntos en una recta, separados uno de otro a la misma distancia. Para ubicar un número entero nos movemos, a partir del 0, tantos lugares como indique el número, a la derecha si es positivo y a la izquierda si es negativo.




Para ubicar puntos en el plano, la situación es igual. Nota que los ejes son dos rectas como la anterior, sólo que ahora consideraremos dos movimientos: unos sobre el eje X, como se hizo en la recta anterior, y otro hacia "arriba" o "abajo" respecto al eje Y. Por ejemplo, ubicamos los puntos $A(4, 6)$ y $B(4, -6)$ (imagen izquierda) y $C(-5, 3)$ y $D(-5, -3)$ (imagen derecha).




Así, cada punto determinado por dos valores $x$ y $y$, se denota por la pareja ordenada $(x, y)$. El primer valor corresponde al eje X (coordenada horizontal) y el segundo, al eje Y (coordenada vertical).

**Recuerda que...**

Los **números enteros** son los números enteros positivos: 1, 2, 3, ..., el 0 y todos los enteros negativos como –4, –2, –1.

**Recuerda que...**

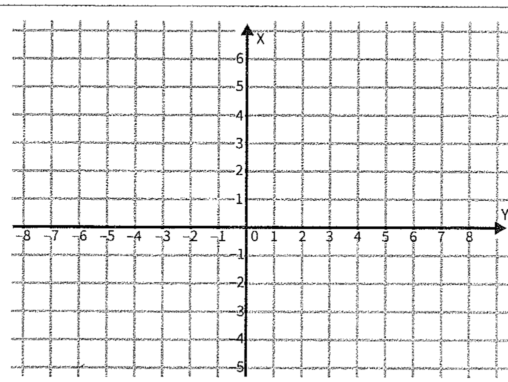
Se llama pareja ordenada $(x, y)$ porque $(x, y)$ no representa el mismo punto que $(y, x)$.

### Actividad de aprendizaje 1

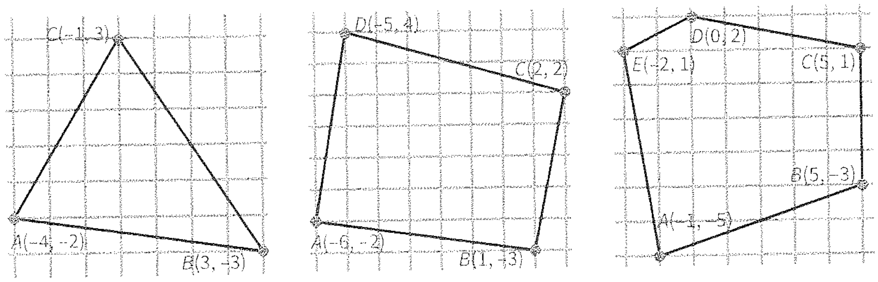
**Con base en la información anterior, responde lo que se pide.**

1. Ubica los puntos en el plano cartesiano y únelos en orden, menos $R$. Une $Q$ con $A$.

| | | |
|---|---|---|
| $A(6, 7)$ | $B(6, 5)$ | $C(9, 3)$ |
| $D(4, 3)$ | $E(4, -5)$ | $F(1, -5)$ |
| $G(1, -3)$ | $H(-2, -3)$ | $I(-2, -5)$ |
| $J(-5, -5)$ | $K(-5, 0)$ | $L(-8, 1)$ |
| $M(-6, 2)$ | $N(-5, 0)$ | $O(0, 0)$ |
| $P(4, 4)$ | $Q(4, 5)$ | $R(6, 4)$ |

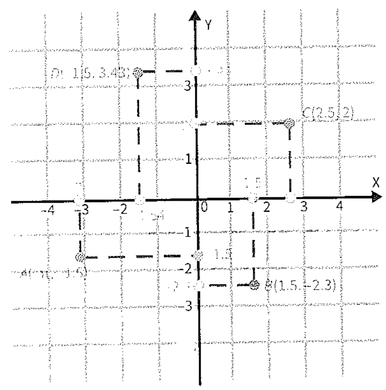


2. Dibuja los ejes de coordenadas adecuadamente para que los puntos correspondan con los valores. Recuerda señalar el origen.




## Recuerda que...

Los **números reales** son todos los que conozco hasta ahora: enteros positivos, enteros negativos, el cero, todas las fracciones y todos los irracionales como π y raíz de 2.




Ahora que sabemos ubicar puntos con coordenadas enteras, seguro ya entendiste de qué trata esto: como lo imaginas, las coordenadas reales se refieren a que los valores *x* y *y* pueden ser cualquier **número real**. Por ejemplo, ubicaremos $A(-\pi, -1.5)$, $B(1.5, -2.3)$, $C(2.5, 2)$ y $D(-1.54, 3.43)$.

Tener un sistema de coordenadas es útil en diversas áreas, por ejemplo, en las ciudades puedes ubicar lugares importantes si los trazas sobre un plano cartesiano, donde las calles son una referencia.

## Actividad

**Con base en lo visto lleva a cabo lo que se pide.**

Consigue papel milimétrico, dibuja un plano cartesiano y ubica los puntos. Con base en el plano, responde las preguntas.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A(5, 6)$ | $B(-1.5, 3/2)$ | $C(-5/2, -4)$ | $D(1/2, 3)$ | $E(-2.5, -4)$ | $F(1.3, -0.8)$ |
| $G(-3, -\pi)$ | $H(5, -3.2)$ | $I(-6.1, 0)$ | $J(5, 1.7)$ | $K(5, \pi)$ | $L(\pi, -\pi)$ |
| $M(-1, -1)$ | $N(-4.3, -\pi)$ | $O(5, -5)$ | $P(4, -\pi)$ | $Q(0, -12.3)$ | $R(5, -9)$ |

1. ¿Qué se forma con los puntos cuya coordenada *x* siempre es 5?

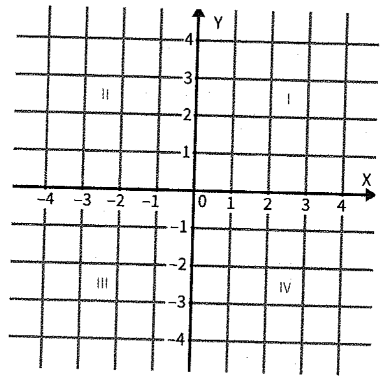
2. ¿Qué se forma con los puntos cuya coordenada *y* siempre es $-\pi$?

3. ¿Cómo son las coordenadas de los puntos que están sobre el eje X?

## Cuadrantes del plano cartesiano

Los ejes dividen al plano cartesiano en **cuatro cuadrantes**, denominados **I**, **II**, **III** y **IV**, como se muestra en la figura.

- En el cuadrante **I** se encuentran los puntos con coordenadas positivas (+, +).
- En el cuadrante **II** se encuentran los puntos con coordenada *x* negativa y *y* positiva (–, +).
- En el cuadrante **III** están los puntos con coordenadas negativas (–, –).
- En el cuadrante **IV** están los puntos con coordenada *x* positiva y *y* negativa (+, –).



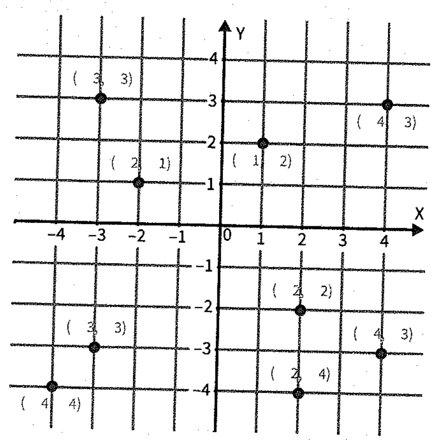

## Actividad de aprendizaje 3

**Con base en la información anterior responde lo que se pide.**

1. Indica en qué cuadrante está cada punto.

| Punto | Cuadrante |
|---|---|
| $A(3, 4)$ | |
| $B(5.5, -2)$ | |
| $C(-1.6, -5/6)$ | |
| $D(-1.13, -3)$ | |
| $E(-2.1, 10.5)$ | |
| $F(-5, 3)$ | |

2. Escribe los signos de las coordenadas según el cuadrante en el que están.




## Actividad de aprendizaje 4

Productos esperados

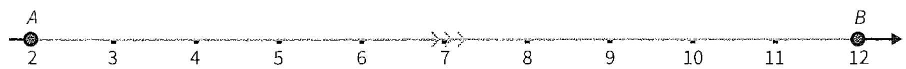
**Esta actividad pertenece a tu portafolio de evidencias, debes hacerla en hojas separadas y conservarla.**

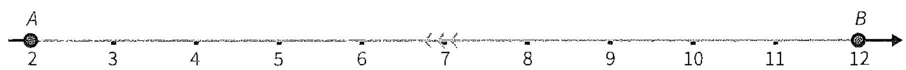
1. Dibuja un plano del lugar donde vives. No debe ser exacto, para hacerlo utiliza tu percepción cuando vas de un lugar a otro.
2. En una hoja de papel arroz o albanene traza un plano cartesiano.
3. Coloca el plano cartesiano sobre tu mapa y ubica tres lugares importantes para ti. Escribe las coordenadas en donde se ubican dichos lugares, por ejemplo *escuela* (4, –5). Puede haber coordenadas fraccionarias.

## Distancia entre puntos

Una vez más, antes de trabajar en el plano veremos qué sucede en la recta real. Comenzaremos por entender qué es la **longitud de un segmento**. Por ejemplo, ¿cuál es la longitud del segmento que une $A(2)$ con $B(12)$? ¿Y la longitud del segmento que une $B(12)$ con $A(2)$?

La longitud del segmento $AB$ se denota por $\overline{AB}$.




Primero, notemos que el segmento $AB$ tiene una dirección contraria al segmento $BA$, esto significa que el segmento $AB$ inicia en $A$ y termina en $B$ mientras que el segmento $BA$ inicia en $B$ y termina en $A$. A estos segmentos se les llama **segmentos dirigidos** y en geometría analítica es importante tener en cuenta que existen.

La longitud de un segmento dirigido está dada por la resta del valor del extremo final menos el valor del extremo inicial:

| Longitud de $AB$: | Longitud de $BA$: |
|---|---|
| $\overline{AB}=B-A=12-2=10$ | $\overline{BA}=A-B=2-12=-10$ |

Nota que en geometría analítica tenemos longitudes negativas.

### Actividad de aprendizaje

**Responde y efectúa en tu cuaderno lo que se pide a continuación.**

1. Ubica los puntos en una recta, dibuja una por cada par de puntos, y obtén la longitud de los segmentos $AB$.

   $A = 10$; $B = 20$ — $A = 14$; $B = -3$ — $A = -15$; $B = -4$

   $A = 7$; $B = -3.5$ — $A = 15/8$; $B = 7/8$ — $A = -1/2$; $B = 0.5$

   $A = -3$; $B = -7$ — $A = 10$; $B = 25$ — $Q = -1.7$; $R = 7.3$

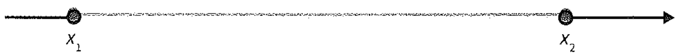
2. Calcula las longitudes de los segmentos $BA$ del ejercicio anterior.

Para hablar de distancia lo haremos a través de la siguiente actividad.

## Actividad de aprendizaje 6

**Responde lo que se pide a continuación.**

1. Con base en la imagen responde las preguntas:




a. ¿La distancia de $x_2$ a $x_1$ es la misma que de $x_1$ a $x_2$? ¿Por qué?

b. ¿Qué añadirías a la regla para hallar la longitud, para no obtener valores negativos? Escríbelo a continuación.

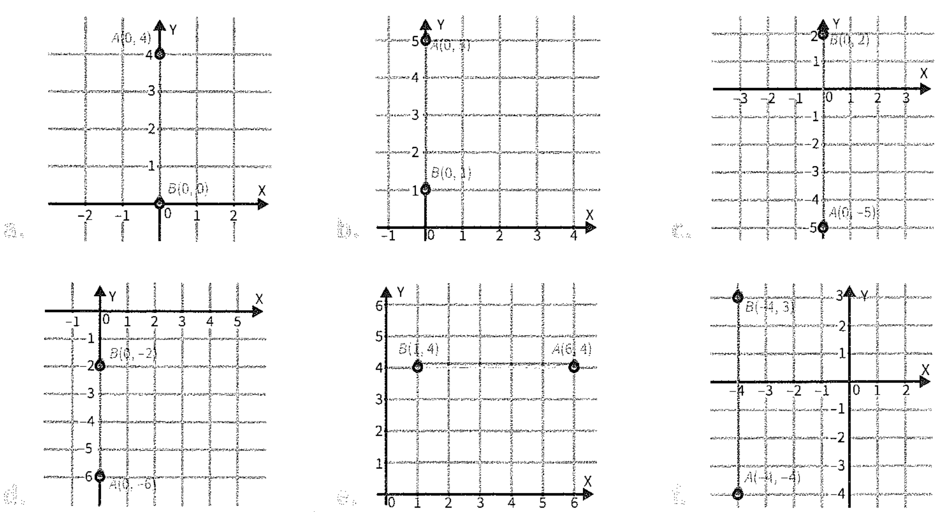
2. Con base en el ejercicio 2 y la siguiente definición, responde las preguntas.
La distancia entre dos puntos cualesquiera $A = x_1$ y $B = x_2$ en la recta está definida como el **valor absoluto** de la diferencia de sus valores: $d(A, B) = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$.

a. ¿Por qué la distancia se define como el valor absoluto de la diferencia?

b. Utiliza la fórmula para hallar la distancia entre $A$ y $B$.

- $A = -3.2$ y $B = 6$
- $A = -8$ y $B = -13$
- $A = 8$ y $B = -4.7$

3. Aunque no se ha definido la distancia en el plano, calcula de manera intuitiva la distancia entre los puntos mostrados. Explica cómo las obtuviste.




4. Calcula los valores absolutos $|2|$, $|-2|$, $|2|^2$ y $|-2|^2$. Ahora, de manera intuitiva argumenta que $|x|^2 = x^2$ para cualquier valor de $x$.

En los segmentos dirigidos nos importa el inicio y el final del segmento.

$AB$ es el segmento que inicia en $A$ y termina en $B$, mientras que $BA$ inicia en $B$ y termina en $A$.

Sus longitudes tienen signo opuesto y sus distancias son iguales:

$$\overline{AB} = \overline{BA}$$

$$d(A, B) = d(B, A)$$

Ejemplo:

$A = 4$ y $B = 10$.

$d(A, B) = |10 - 4| = 6$.

$d(B, A) = |4 - 10| = |-6| = 6$.

### Recuerda que...

El **valor absoluto** está definido como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

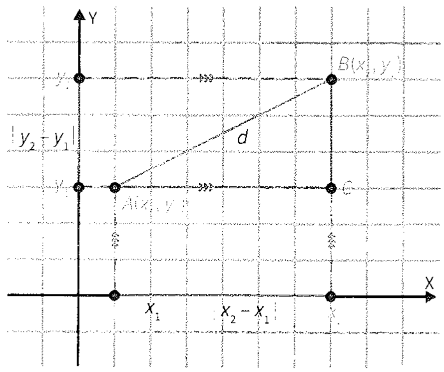
Esto quiere decir que a cualquier número el valor absoluto le asocia su valor positivo.

Ejemplo: $|4| = |-4| = 4$.

La distancia entre $A$ y $B$ es la misma que entre $B$ y $A$ así que no importa a quién tomes como $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$, pero sí debes tener cuidado de mantener el orden, es decir que no se vale hacer esto:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Utilizaremos las distancias en la recta y el teorema de Pitágoras para hallar la distancia entre dos puntos cualesquiera $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, en el plano cartesiano. El segmento $AC$ mide $|x_2 - x_1|$ y $CB$ mide $|y_2 - y_1|$.




Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo $ABC$ tenemos que:

$$d(A,B)^2 = d(A,C)^2 + d(C,B)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

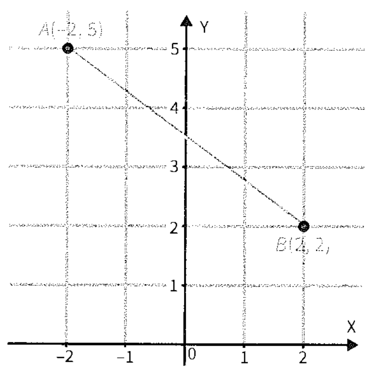
Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

Análogamente, la longitud de un segmento tiene signo y éste depende de la dirección del segmento, mientras que la distancia entre los extremos del segmento siempre es positiva.

### Ejemplo

Para ilustrar esta definición, determinaremos la distancia entre los puntos $A(-2, 5)$ y $B(2, 2)$, usando la fórmula vista anteriormente.




$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(2-(-2))^2 + (2-5)^2} \\ &= \sqrt{(2+2)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia entre estos puntos es 5.

## Actividad

**Utiliza lo visto hasta ahora para resolver los ejercicios.**

1. Halla la distancia entre los puntos.

| | | |
|---|---|---|
| $A(-5, -1)$, $B(3, 5)$ | $C(-5, 5)$, $D(4, -7)$ | $E(-4, 3)$, $F(2, 3)$ |
| $G(3, 3)$, $H(3, -6)$ | $I(-5, 3)$, $J(7, -2)$ | $K(16, 4)$, $L(1, -4)$ |

2. Halla la coordenada $y$ de $B$ si conocemos $A$ y la distancia entre $A$ y $B$.

a. $A(-7, 6), B(-4, \quad), d(A, B) = 5$

b. $A(-6, -4), B(6, \quad), d(A, B) = 15$

c. $A(6, -2), B(-4, \quad)\ d(A, B) = 10$

d. $A(-8, 8), B(4, \quad), d(A, B) = 12$

e. $A(5, 3), B(-5, \quad), d(A, B) = \sqrt{136}$

f. $A(4, -5), B(-5, \quad), d(A, B) = \sqrt{145}$

3. Demuestra que los puntos son los vértices de triángulos isósceles.

a. $A(3, 3), B(6, 6), C(9, 3)$

b. $A(0, 2), B(1, -3), C(5, 1)$

c. $A(-3, 3), B(-3, 4), C(-4, 3)$

d. $A(6, 4), B(-5, -3), C(-3, 6)$

e. $A(5, -3), B(3, -5), C(7, -7)$

f. $A(5, 1), B(10, 1), C(6, -2)$

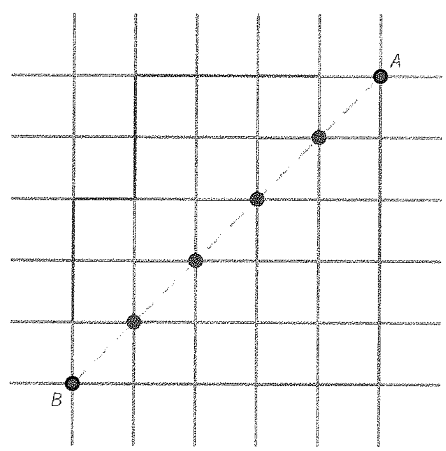
## Otra forma de medir

La distancia entre puntos se definió como lo que nos parece natural: la longitud del camino más corto entre ellos. Esta métrica se llama **métrica euclidiana**, pero no es la única manera de medir. Existe otra llamada **métrica del taxista** y se define de la siguiente manera.

La distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, está determinada por la suma del valor absoluto de la diferencia de las abscisas con el valor absoluto de la diferencia de las ordenadas.

$$d(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

En la métrica euclidiana, la distancia entre dos puntos es la longitud del camino "más corto" que los une, mientras que en la métrica del taxista el camino “más corto” no es único. En la imagen puedes ver distintos caminos entre $A$ y $B$ y todos tienen la misma longitud (10 unidades), incluso el rosa.



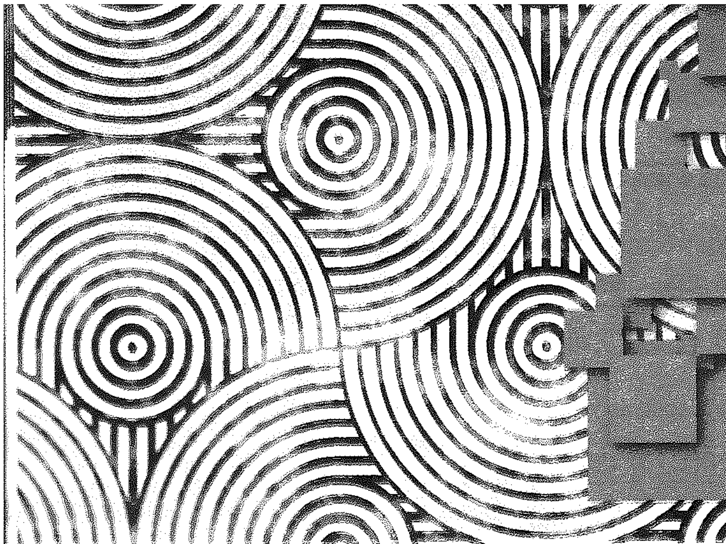

Aunque te parezca extraño que el camino punteado mida 10 unidades, el chiste está en que no lo midas con la métrica euclidiana sino con la del taxista. Nota que con esta métrica cada pedacito mide dos unidades y no $\sqrt{2}$, en total, el camino mide 10.

## Actividad de aprendizaje 8

Productos esperados

**Esta actividad pertenece a tu portafolio de evidencias, debes hacerla en hojas separadas y conservarla.**

1. Elabora un mapa del lugar donde vives, sitúa tu casa y tu escuela.
2. Calcula, con la métrica euclidiana, la distancia entre tu escuela y tu casa.
3. Calcula con la métrica del taxista la distancia de tu casa a tu escuela y marca distintos caminos que midan lo mismo.



# Los lugares geométricos básicos: la recta y la circunferencia

## La recta en el plano cartesiano

Cuando tratamos las distancias en la recta real respondimos cómo obtener la longitud de un segmento que une dos puntos, sin la necesidad de un dibujo, y sin mencionarlo. Sucedió lo mismo con las distancias en el plano. Esto quiere decir que podemos saber la longitud del segmento que tiene por extremos (1, 2) y (−5, −3) sin necesidad de dibujarlo. Lo mismo es con cualquier segmento.

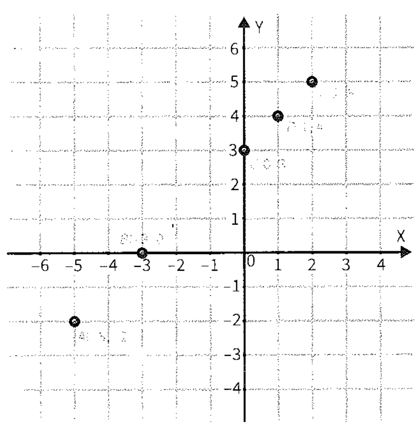
Ahora queremos saber si a través de una expresión algebraica podemos describir una recta. Esto lo haremos a través de la siguiente actividad.

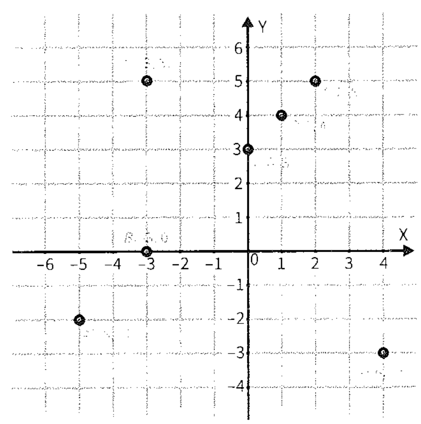
### Actividad

**Pon atención a cada paso de la actividad para responder lo que se pide.**

1. Primero graficamos los puntos $A(-5, -2)$, $B(-3, 0)$, $C(0, 3)$, $D(1, 4)$ y $E(2, 5)$ (imagen izquierda). Si los unimos es fácil identificar que la figura que forman es una recta. Responde las preguntas.

   Graficamos $F(-3, 5)$ y $G(4, -3)$ (imagen derecha), ¿son puntos de la recta anterior?




   En la primera imagen une los puntos y dibuja tres más que sí estén en la recta. Indica sus coordenadas.

c. Utiliza la gráfica para decidir cuáles puntos están en la recta. Al final márcalos en la imagen.

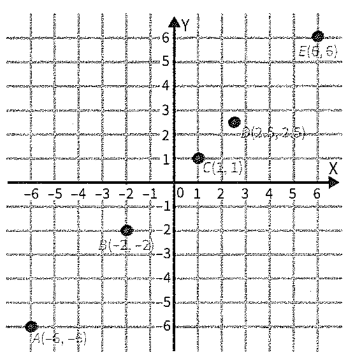
| | | | |
|---|---|---|---|
| $H(-4, -1)$ | $I(-1, 1)$ | $J(5, 8)$ | $K(-2, 1)$ |
| $L(0, 0)$ | $M(-6, -3)$ | $N(-6, -4)$ | $\tilde{N}(3.5, 6.5)$ |
| $O(4.5, -7.5)$ | $P(-1.5, 1.5)$ | $Q(-6.5, 2.5)$ | $R(2.25, 5.25)$ |

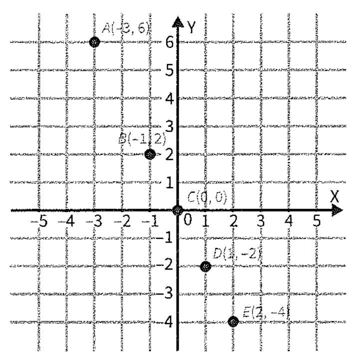
d. Observa los puntos que están en la recta y con tus palabras describe las relaciones que encuentras entre la coordenada $y$ y la coordenada $x$, en cada punto. ¿Hay una regularidad?

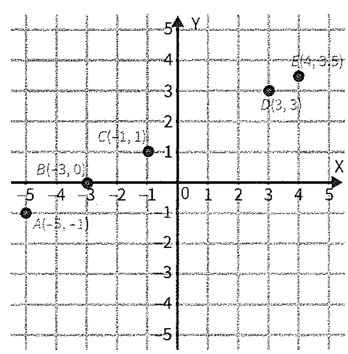
e. Sin ver la gráfica, y con lo escrito anteriormente, di cuáles puntos están en la recta.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S(-7, -4)$ | $T(9, 12)$ | $U(-5.7, -2.5)$ | $V(0.5, 3)$ |
| $W(0.5, 3.5)$ | $X(-\pi, -\pi + 3)$ | $Y(18, 21)$ | $Z(50, 53)$ |

2. En los planos une los puntos y marca por lo menos cinco puntos que estén en las rectas. Al final escribe las relaciones que notes entre las coordenadas.




3. De los conjuntos de puntos del ejercicio anterior, señala cuáles pertenecen a una misma recta.

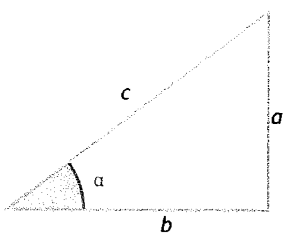
Como conclusión, podemos decir que los puntos en el plano que están en una recta guardan una relación entre sus coordenadas, es decir, que no son aleatorios y podemos describirlos. Por ahora lo hiciste de manera verbal, sin embargo, adelante aprenderás a hacerlo de manera algebraica.

## Ángulo de inclinación y pendiente

Observa en las imágenes que todos los segmentos de la recta forman el mismo ángulo con el eje X o con un segmento paralelo a él. También nota en la imagen de la derecha que el ángulo cambia si uno de los extremos de un segmento no es un punto de la misma recta.

**Recuerda que...**

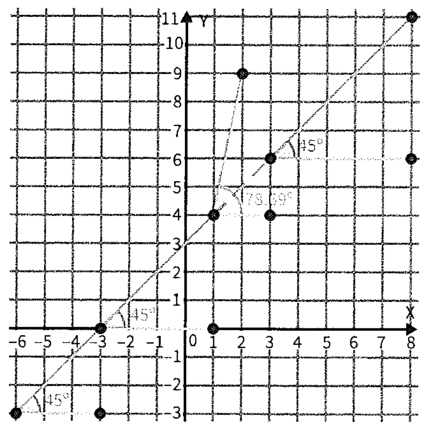
**La tangente trigonométrica de un ángulo en un triángulo rectángulo se define como el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente.**

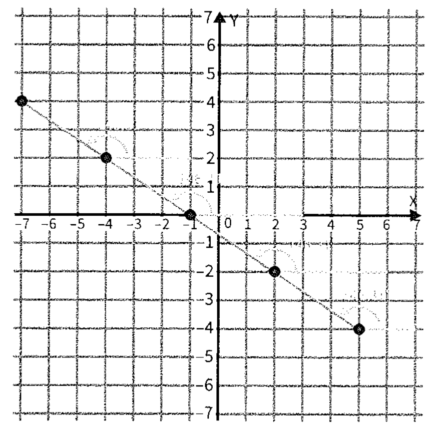



Al ángulo que se forma con la recta y el eje X en sentido positivo (opuesto a las manecillas del reloj) se le llama ángulo de inclinación. La **pendiente** ($m$) de una recta se define como la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación y está dada por la fórmula:

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ con } x_1 \text{ distinto de } x_2,$$

donde $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son cualesquiera dos puntos de la recta. Cuando el ángulo de inclinación es agudo, la pendiente es positiva (imagen izquierda) y cuando el ángulo es obtuso, la pendiente es negativa (imagen derecha).



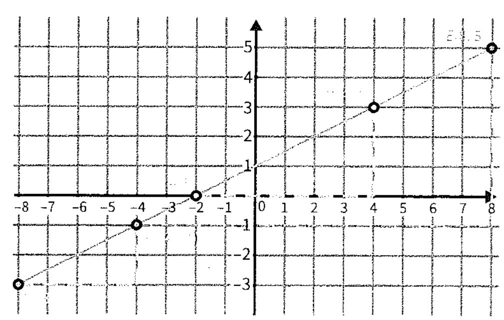

Cada dos puntos de una recta determinan un segmento de la misma, y dado que el ángulo de inclinación es el mismo, la pendiente también lo será. Es decir, que no importa el par de puntos $A$ y $B$ que tomemos, si están en la misma recta, la pendiente será la misma.

Por ejemplo, calculemos la pendiente de los segmentos $AB$, $CD$ y $BE$.

$$m_{AB} = \frac{-1-(-3)}{-4-(-8)} = \frac{-1+3}{-4+8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$m_{CD} = \frac{3-0}{4-(-2)} = \frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$m_{BE} = \frac{5-(-1)}{8-(-4)} = \frac{5+1}{8+4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$



Así, la recta que pasa por los puntos $A(-8, -3)$, $B(-4, -1)$, $C(-2, 0)$, $D(4, 3)$ y $E(8, 5)$, tiene pendiente 1/2.

## Actividad de aprendizaje 10

**Realiza lo que se indica**

1. Grafica en tu cuaderno los puntos y calcula la pendiente de la recta que determinan.

   a. $A(-1, 0)$ y $B(0, 1)$
   b. $C(0, 2)$ y $D(2, 0)$
   c. $E(3, 1)$ y $F(4, 4)$
   d. $G(2, 2)$ y $H(6, 3)$
   e. $I(-2, 2)$ y $J(-1, -2)$
   f. $K(1, -1)$ y $L(-3, -3)$
   g. $M(-3, -1)$ y $N(5, -3)$
   h. $\tilde{N}(5, 1)$ y $O(4, -4)$
   i. $P(2, 1)$ y $Q(1, -4)$

2. Calcula las pendientes e identifica los puntos. Grafica las rectas.

   a. $\dfrac{9-3}{7-1}$
   b. $\dfrac{7-3}{-4-(-2)}$
   c. $\dfrac{-3-(-5)}{-1-(-2)}$
   d. $\dfrac{-6-(-1)}{11-1}$
   e. $\dfrac{8-3}{7-(-4)}$
   f. $\dfrac{10-3}{-6-1}$
   g. $\dfrac{4-(-4)}{4-(-4)}$
   h. $\dfrac{-9-5}{-3-4}$
   i. $\dfrac{0-(-3)}{-2-5}$

3. Calcula las pendientes dos a dos y di si son puntos colineales.

   a. $\{(-3, -2), (1, 3), (5, 8)\}$
   b. $\{(-4, 4), (-3, 2), (-2, -2)\}$
   c. $\{(-4, -1), (-1.5, 0), (1, 1)\}$
   d. $\{(1.5, -2), (-0.5, 2), (-1.5, 3)\}$

4. Observa la imagen del ejemplo de la página anterior y escribe la relación que encuentres entre la penúltima fracción del cálculo de cada pendiente y las longitudes de los triángulos marcados. Anota tu observación a continuación. ¿Qué pasa si la recta tiene pendiente negativa?

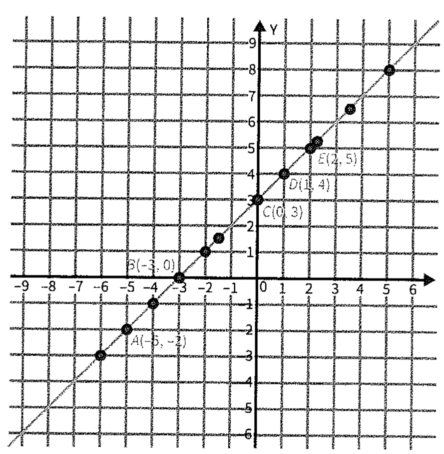
**Recuerda que...**

**Los puntos colineales son los que pertenecen a la misma recta.**

**Una ecuación es una igualdad válida para algunos valores de las variables.**

# La ecuación de la recta

Retoma la gráfica que analizaste en la Actividad de aprendizaje 9. Los puntos de la recta $(-6, -3)$, $(-5, -2)$, $(-4, -1)$, $(-3, 0)$, $(-2, 1)$, $(-1.5, 1.5)$, $(0, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 5)$, $(2.25, 5.25)$, $(3.5, 6.5)$ y $(5, 8)$ satisfacen que $y$ se obtiene sumando 3 a $x$. Por ejemplo, $-3 = -6 + 3$, $-2 = -5 + 3$, $4 = 1 + 3$ y $5.25 = 2.25 + 3$ y de manera general la relación es $y = x + 3$. De aquí obtenemos la ecuación $x - y + 3 = 0$.




A una expresión algebraica de la forma $Ax + By + C = 0$ se le llama **ecuación general** de la recta. Toda expresión de esta forma describe una línea recta.

**Para saber más**

**Cuando la recta está expresada de la forma $y = mx + b$ se refiere a una función lineal. Es decir que $y$ está en función de la variable $x$.**

## Actividad

**Realiza lo que se indica.**

1. De estas ecuaciones, indica cuáles son $A$, $B$ y $C$.

| | | |
|---|---|---|
| $3x + 2y + 4 = 0$ | $-x + y + 1 = 0$ | $x - 5y - 8 = 0$ |
| $3x + y + 3 = 0$ | $x - y = 0$ | $x + 3y = 0$ |

2. Lleva las ecuaciones a su forma $Ax + By + C = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $-x + 4y = -1$ | $5x + 5 = 2x - y$ | $y - 6 = 6 - 4x$ |
| $3y + 9 = -y + x$ | $2x + 2 = y + x - 3$ | $-2 - 5y - 4x = -4y - 6x$ |

3. Responde:
   ¿Cómo son las rectas si $A = 0$? Toma como ejemplo $0x + 2y + 1 = 0$.
   ¿Cómo son las rectas si $B = 0$? Toma como ejemplo $2x + 0y + 1 = 0$.

4. De las ecuaciones del ejercicio 1 despeja $y$. En la expresión obtenida sustituye los valores de $x$, para hallar los valores de $y$ asociados a dichos valores de $x$.

| | | |
|---|---|---|
| $x = -2, 0, 2$ | $x = -3, -1.5, 0, 2$ | $x = -2, 0, 1, 3$ |
| $x = -2, -1, 0, 0.5, 1$ | $x = -2.5, -1, 0, 1.7, 4$ | $x = -3, -1.5, 0, 1.5, 3$ |

### Recuerda que...

Las soluciones de una ecuación son los valores que hacen a la igualdad válida.

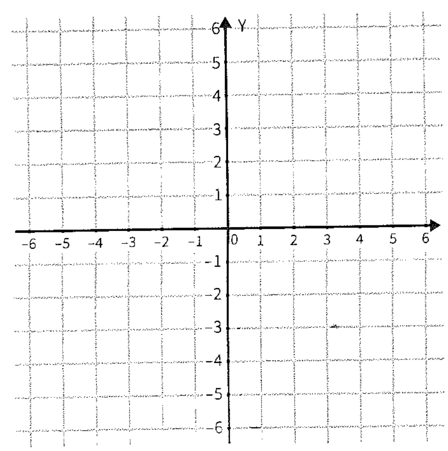
Por ejemplo, 3 es solución de $x + 2 = 5$, pues $3 + 2 = 5$, mientras que 4 no es solución, pues $4 + 2$ no es 5.

Una solución de $x + y = 3$ es $x = 1$ y $y = 2$, pues $1 + 2 = 3$.

5. Sustituye en la ecuación el valor de la variable que se da y despeja la otra variable para hallar su valor asociado. Las parejas de valores son soluciones de la ecuación. Grafícalas en el plano cartesiano y elige dos puntos para calcular su pendiente.

| $2x + 5y - 3 = 0$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| | 3 |
| −4 | |
| −3 | |
| −2.5 | |
| −1 | 1 |
| 0.5 | |
| 1.5 | |
| | −1 |
| 5 | |
| 6 | |

$m = \dfrac{\quad - \quad}{\quad - \quad} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$




6. Grafica las ecuaciones de 1 y 2. Halla la pendiente de cada una y compáralas con el cociente $-A/B$. Discute tus observaciones con tus compañeros.

7. De la forma general de una recta $Ax + By + C = 0$ despeja la variable $y$. Considera a $B \neq 0$.

# Variación de los parámetros *m* y *b*

De la ecuación general de una recta $Ax + By + C = 0$ despejaremos la variable $y$. Tomando en cuenta que $B$ no es 0. Ya lo hiciste en la actividad anterior y debe parecerse a esto:

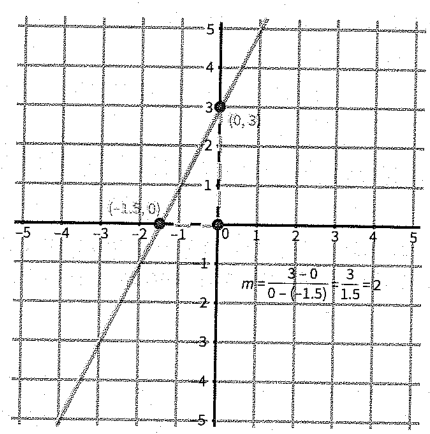
$$\begin{aligned} & Ax+By+C=0 \\ \Rightarrow\quad & By = -AX-C \\ \Rightarrow\quad & y = \frac{-Ax-C}{B} \\ \Rightarrow\quad & y = -\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \end{aligned}$$

Con esto, podemos ver que toda recta puede verse como una función donde $y$ depende de $x$. El cociente $-A/B$, que calculaste en la Actividad de aprendizaje 11 es la pendiente ($m$) de la recta. Al término $-C/B$ le llamaremos $b$. Reescribiendo la expresión tenemos $y = mx + b$.

### Ejemplo

De la ecuación $6x - 3y + 9 = 0$ (imagen derecha) identificamos $A = 6$, $B = -3$ y $C = 9$. Así:

$$m=-\frac{A}{B}=-\left(\frac{6}{-3}\right)=2 \text{ y } b=-\frac{C}{B}=-\left(\frac{9}{-3}\right)=3.$$




Sustituimos los valores y obtenemos $y = 2x + 3$. Su pendiente es 2 y $b = 3$.

En la imagen nota que $b$ coincide con la coordenada $y$ del punto de intersección de la recta con el eje Y.

## Actividad de aprendizaje 12

**Lleva a cabo las actividades.**

1. Completa la tabla. Guíate con el ejemplo.

| Ecuación general | A | B | C | $m=-\frac{A}{B}$ | $b=-\frac{C}{B}$ | $y=mx+b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x+6y-3=0$ | 3 | 6 | −3 | $-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$ | $-\frac{(-3)}{6}=\frac{1}{2}$ | $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ |
| $6x-2y-36=0$ | | | | $-\left(\frac{6}{-2}\right)=3$ | | $y=3x-18$ |

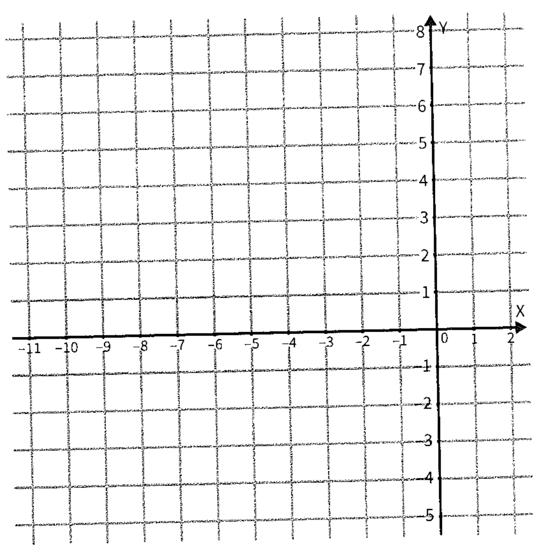
**Hacia Planea**

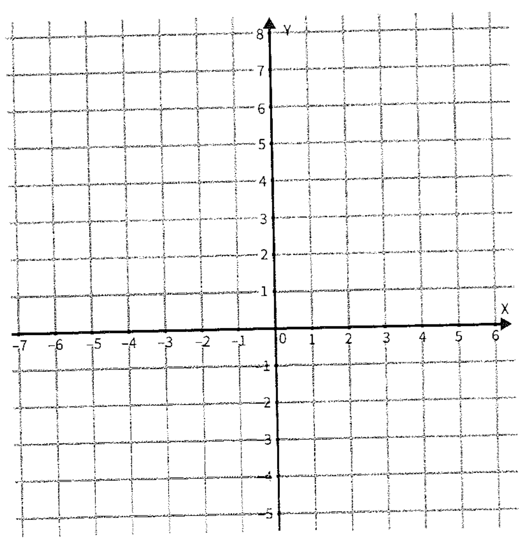
Contesta lo siguiente:

1. La ordenada del punto sobre el eje X que dista 8 unidades del eje Y es:
   a. 8
   b. −8
   c. 0
   d. Indeterminable
2. Si $a$ es constante, $f(a)=0$ representa:
   a. El punto $(0, a)$
   b. Intersección con Y
   c. Intersección con X
   d. Una recta
3. Al evaluar $y=-4$ en $x-y=0$, se obtiene:
   a. (4, 4)
   b. (−4, −4)
   c. (4, −4)
   d. (−4, −4)

| Ecuación general | $A$ | $B$ | $C$ | $m=-\dfrac{A}{B}$ | $b=-\dfrac{C}{B}$ | $y=mx+b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-y+4=0$ | 2 | | | | | |
| $3x-y+3=0$ | | | | | | |
| $4x-9y+36=0$ | | | 36 | | | |
| $x-10y+44=0$ | | | | | $-\left(\dfrac{44}{-10}\right)=4.4$ | |
| $9x-3y-18=0$ | 9 | | | | | |
| $-2x+3y-12=0$ | | | | | | |
| $6x-2y+20=0$ | | | 20 | | | |
| $-7x+14y-14=0$ | | | | | | |
| $3x-y+6=0$ | | | | | | $y=3x+6$ |
| $x-y+4=0$ | | $-1$ | | | | |
| $3x-y+23=0$ | | | | | | |
| $x-11y+44=0$ | | | | | | |
| $9x-3y+9=0$ | | | | | | |

2. En el plano de la derecha dibuja las rectas que tengan la misma pendiente, en el de la izquierda dibuja las que tienen el mismo valor en $b$.



3. Con base en las gráficas anteriores responde:
   a. ¿Cómo son las rectas que tienen la misma pendiente?
   b. Si dos rectas tienen la misma pendiente y el mismo valor $b$, ¿cómo son?
   c. ¿Qué ocurre, si en las rectas con mismo valor de $b$, su intersección con el eje X se aleja cada vez más del origen?
4. Si la pendiente de una recta está dada por el cociente $-A/B$, ¿la pendiente de una recta de la forma $Ax + C = 0$ existe? ¿Por qué? Recuerda la función tangente que viste en tu curso anterior.

## Actividad de aprendizaje 13

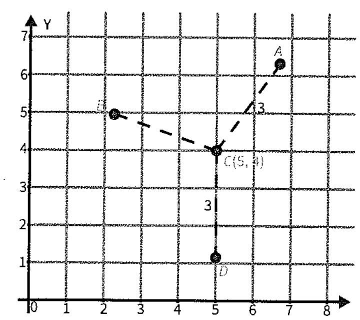
Productos esperados

**Esta actividad pertenece a tu portafolio de evidencias, debes hacerla en hojas separadas y conservarla.**

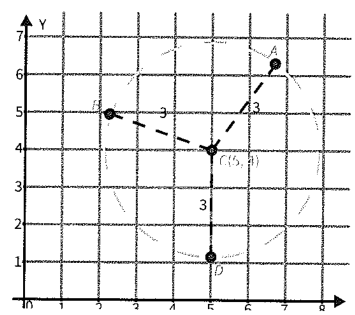
1. Consigue papel milimétrico. Traza en él los ejes coordenados y los valores.
2. Traza una recta y marca los puntos de intersección con los ejes.
3. Calcula la pendiente y escribe su forma $y = mx + b$.
4. Con base en lo aprendido en la Actividad de aprendizaje 11, ejercicio 6 escribe otra función $y = m_1x + b_1$ que sea paralela a la que dibujaste.
5. Menciona dos puntos de esta nueva recta, márcalos en tu plano y grafica la recta.

# Definición y construcción geométrica de la circunferencia

Ya aprendimos cómo dados dos puntos en el plano cartesiano $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, podemos conocer la distancia entre ellos como la medida del segmento de recta que los une. Ahora nos preguntaremos por la solución a un problema relacionado: dados un punto en el plano $C(x_0, y_0)$ y una distancia representada por un número real no negativo $r \geq 0$, ¿cómo podemos describir a **todos** los puntos que están exactamente a una distancia $r$ de $C(x_0, y_0)$?




Para fijar ideas, pensemos en un pastizal muy grande donde hemos clavado una estaca, y que de ésta hemos amarrado a una cabra hambrienta con una cuerda que mide tres metros. Después de un par de horas, la cabra ha devorado todo el pasto que estaba a su alcance, ¿qué forma reconoceremos en el pastizal? ¿Cuál es el contorno del área devorada por la cabra?




Por ejemplo, si en un sistema de coordenadas identificamos con $C(5, 4)$ el punto donde hemos atado a la cabra y $r = 3$ representa la extensión de la cuerda, ¿podemos encontrar un punto a distancia 3 de $C$? ¿Podemos encontrar dos puntos? ¿O tres? ¿Cuántos puntos habrá que cumplan la condición de estar a 3 unidades de $C(5, 4)$? ¿Los puntos que vamos encontrando son el contorno de alguna forma particular?

Nuestra hambrienta cabra ha devorado un círculo de pasto y al contorno de esta figura se le conoce como **circunferencia**. Al punto $C(x_0, y_0)$ se le llama el **centro** y a $r$ el **radio** de la misma.

A cualquier segmento de recta que conecte el centro de una circunferencia con un punto de la misma también se le llamará radio, y a todo segmento de recta que conecte dos puntos de la circunferencia pasando por el centro se le llamará diámetro.

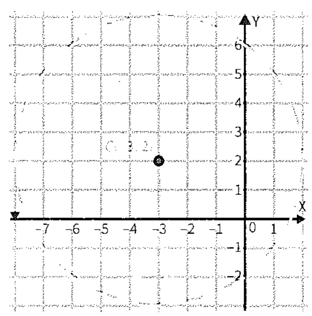
Recuerda que, un círculo es una superficie delimitada por una circunferencia. Está determinada por dos datos: su centro y su radio.

Contesta lo siguiente:

1. El perímetro del cuadrado $PQRS$, con $P(4, 3)$, $Q(-4, -3)$ es:
   a. 40
   b. 14.96
   c. 0
   d. Indeterminable
2. El área del triángulo rectángulo con 10 cm de hipotenusa es:
   a. 12 cm²
   b. 24 cm²
   c. 48 cm²
   d. Indeterminable
3. Al dividir cada segmento de un polígono entre la misma razón ocurre:
   a. una escala
   b. una reflexión
   c. una traslación
   d. una rotación

## Actividad

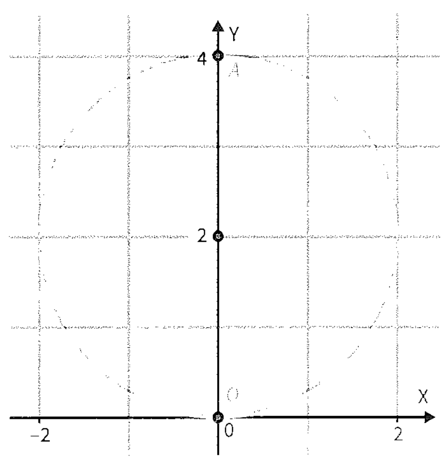
**Utiliza lo visto hasta ahora para responder los ejercicios.**




1. Considera el punto $C(-3, 2)$, ¿cuáles de los puntos se encuentran en la circunferencia con centro en $C$ y radio $r = 5$?

| | |
|---|---|
| $A(0, 0)$ | $B(-6, -2)$ |
| $D(1, 5)$ | $E(-1, 1)$ |
| $F(0, -2)$ | $G(1, 3)$ |

2. El segmento que une los puntos $A(0, 4)$ y el origen es un diámetro de la circunferencia que se muestra en la figura. Da las coordenadas de su centro, el valor del radio y encuentra las coordenadas de tres puntos que estén sobre la misma.



# Ecuación de la circunferencia

De acuerdo con lo visto, una circunferencia en el plano queda determinada completamente por su centro y su radio. Es de esperarse, pues, que estos dos elementos determinen también su ecuación cartesiana.

¿Cómo describimos *geométricamente* la circunferencia? Dijimos que eran todos los puntos $(x, y)$ que se encontraban a una distancia $r \geq 0$ de un punto $C(x_0, y_0)$. De este modo, si $A(x, y)$ es un punto cualquiera en dicha circunferencia, por consiguiente, la expresión $|CA| = r$ deberá caracterizar totalmente este hecho. Es decir, si usamos lo que ya sabemos acerca de la distancia entre puntos, $|CA| = r$ se verá como:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$

o, de manera equivalente, si elevamos ambos lados de la igualdad al cuadrado:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

Esta es la ecuación cartesiana de la circunferencia con centro en $C(x_0, y_0)$ y radio $r \geq 0$. Pon atención en el ejemplo y observa cómo utilizarla para saber si un punto $B(x_1, y_1)$ está sobre la circunferencia.

**Observa que la ecuación de la circunferencia también puede escribirse como:**

$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$

**La forma presentada en el cuerpo del texto se conoce como canónica.**

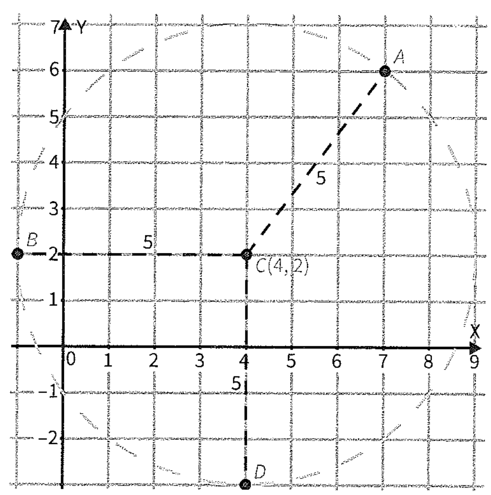
### Ejemplo

De acuerdo con lo anterior, la circunferencia con centro en $C(4, 2)$ y radio 5 tiene ecuación:

$$(x-4)^2+(y-2)^2=25.$$

¿Cómo podemos saber si el punto $B(-1, 2)$ está en dicha circunferencia? Debemos sustituir los valores $x = -1$, $y = 2$ en el lado izquierdo de la ecuación y hacer las operaciones allí indicadas:

$$((-1)-4)^2+((2)-2)^2=(-5)^2+0^2.$$



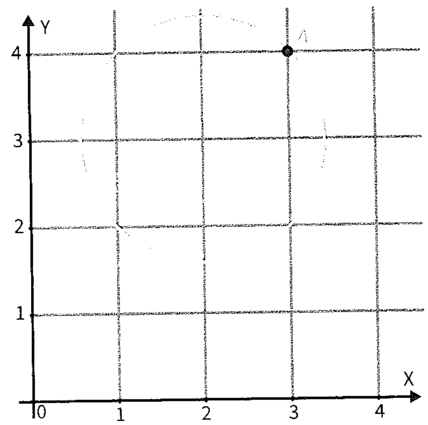

Como $25 + 0 = 25$, que es el lado derecho de la ecuación, $B(-1, 2)$ está en la circunferencia.

¿Está $E(2, 0)$ sobre la circunferencia? La propia ecuación nos los dirá: $(2-4)^2 = (-2)^2 = 4$, $(0-2)^2 = (-2)^2 = 4$. Dado que el lado izquierdo es $4 + 4 = 8$, que no es igual a 25, $E(2, 0)$ **no** está sobre la circunferencia.

## Actividad

**Responde los ejercicios con lo aprendido hasta ahora.**

1. Identifica el centro y el radio de la circunferencia que se muestra en la imagen. La curva pasa por el punto $A(3, 4)$.




2. Con base en tu respuesta a la pregunta anterior, escribe la ecuación cartesiana de la circunferencia.

3. Di si el punto $E(3, 2)$ se encuentra sobre la circunferencia. Justifica tu respuesta.

4. El punto $D$ tiene coordenada $x = 2$. ¿Cuál es su coordenada en $y$?

5. El punto $B$ tiene coordenada $y = 3$. ¿Cuál es su coordenada en $x$?

## Circunferencias concéntricas

Ya hemos visto que geométrica y analíticamente la circunferencia está determinada por un punto del plano, que es su centro $C(x_0, y_0)$, y un número real no negativo, que es su radio $r \geq 0$. Si dejamos el centro fijo y variamos únicamente el radio $r_1, r_2, r_3, \ldots$, obtendremos una familia de circunferencias con el mismo centro y que por esto reciben el nombre de **concéntricas**.

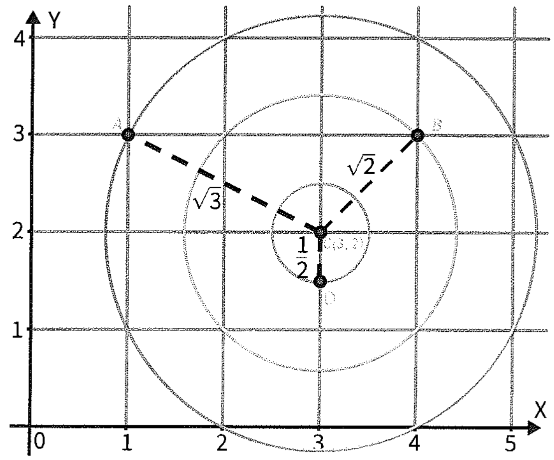
### Ejemplo

¿Podrías escribir las ecuaciones de las tres circunferencias concéntricas de la izquierda de menor a mayor radio?

$$(x-3)^2+(y-2)^2=1/4,$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=2,$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=3.$$




Para saber analíticamente si dos circunferencias son concéntricas o no, basta con comparar sus ecuaciones y cerciorarse si tienen el mismo centro o no. Por ejemplo, considera las ecuaciones siguientes. ¿Representan a una familia de circunferencias concéntricas?

$$x^2+y^2-2x-8y+17=0,$$

$$x^2+y^2-2x-8y+16=0,$$

$$x^2+y^2-2x-8y+8=0.$$

Tenemos que llevar estas expresiones algebraicas a la forma que conocemos. Si completamos los cuadrados con respecto a las variables $x$, y, obtendremos para la primera ecuación:

$x^2+y^2-2x-8y+17=0,$

| | |
|---|---|
| lo que equivale a: | $x^2+y^2-2x-8y+1+16=0,$ |
| distribuyendo los sumandos: | $x^2-2x+1+y^2-8y+16=0,$ |
| factorizando: | $(x-1)^2+(y-4)^2=0.$ |

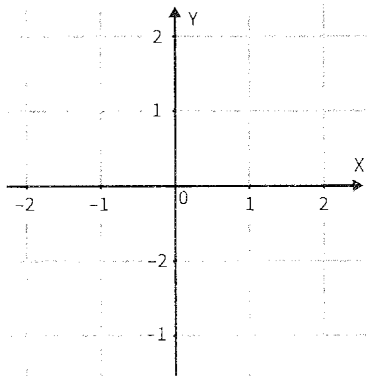
¿Cómo debemos interpretar esta última ecuación? Tal vez deberías detener tu lectura para reflexionarlo un minuto o dos, antes de continuar.

¡La ecuación anterior representa precisamente **un punto**: el centro $C(1, 4)$!

Repitiendo el procedimiento anterior con el resto de las ecuaciones obtendremos, respectivamente, $(x-1)^2+(y-4)^2=1$ y $(x-1)^2+(y-4)^2=9$. Como todas las ecuaciones tienen exactamente los mismos términos del lado izquierdo de la igualdad y hacen referencia al centro $C(1, 4)$, las tres ecuaciones representan circunferencias concéntricas de radios 0, 1 y 3.

## Actividad

**Responde los ejercicios con lo aprendido hasta ahora.**




1. Escribe en tu cuaderno las ecuaciones que representan a las familias de circunferencias concéntricas, agrupadas por su centro $C(x_0, y_0)$.

   Tienen centro en $C(1, 0)$ y sus radios son 0, 2 y 3.

   Tienen centro en $C(-2, -4)$ y sus radios son 1, 4 y 5.

   Tienen centro en el origen y sus radios son $\sqrt{2}$ , 0 y la distancia entre los centros de las circunferencias concéntricas de los incisos a y b.

2. Una familia de circunferencias tiene las ecuaciones: $x^2 + y^2 = 4$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Trázalas y di si son concéntricas. ¿Podrías decir lo mismo a partir de sus ecuaciones?

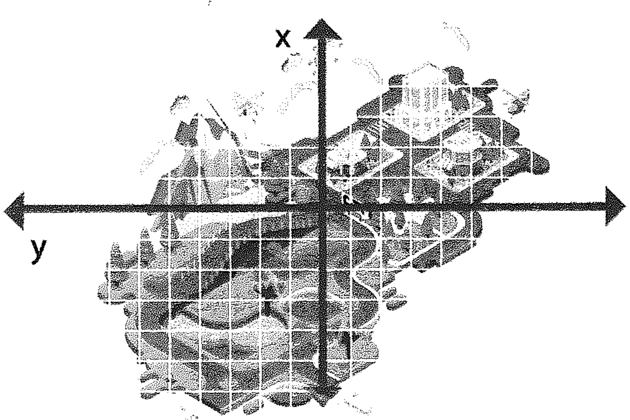
## Actividad de aprendizaje 17

Productos esperados

**En una hoja (o más) de papel milimétrico registra todas tus respuestas a la actividad. Después guárdala en tu portafolio de evidencias.**

1. En un estanque (cubeta, piscina, vaso, etcétera) lleno con agua, deja caer una piedrita (o una gota) verticalmente sobre la superficie. Observarás una familia de circunferencias concéntricas. Si identificamos la superficie del agua con el plano cartesiano y quisieras dibujar **dos** de estas circunferencias, ¿dónde colocarías el origen?

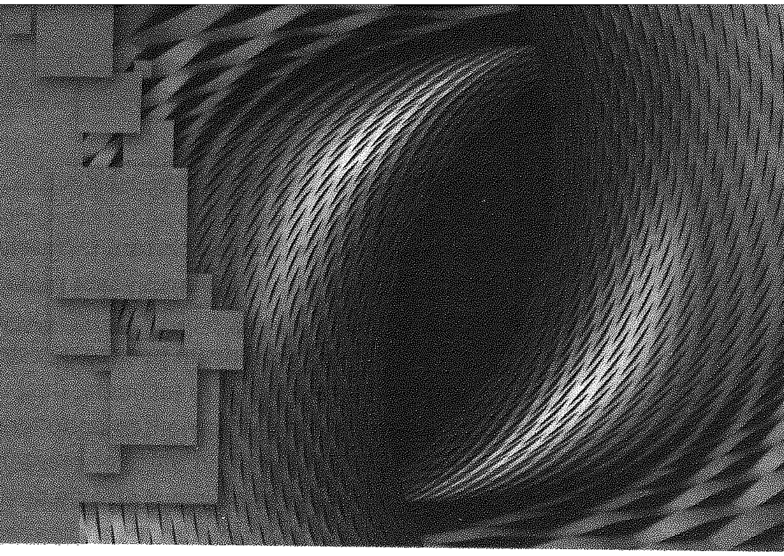
   Ubícalo y traza los ejes coordenados X y Y. Luego ubica el punto que corresponde al centro de la familia de circunferencias y observa que en ningún caso el radio de la circunferencia puede rebasar el borde del estanque. ¿Puedes medir la separación entre una y otra o te resulta más fácil medir el radio de una circunferencia y la otra? ¿Qué ocurre cuando las circunferencias tocan el borde del estanque? Dibuja por lo menos dos de las circunferencias concéntricas observadas y escribe sus ecuaciones. ¿Qué ocurre si eliges otro centro $C(x_0, y_0)$ para la familia de circunferencias concéntricas?



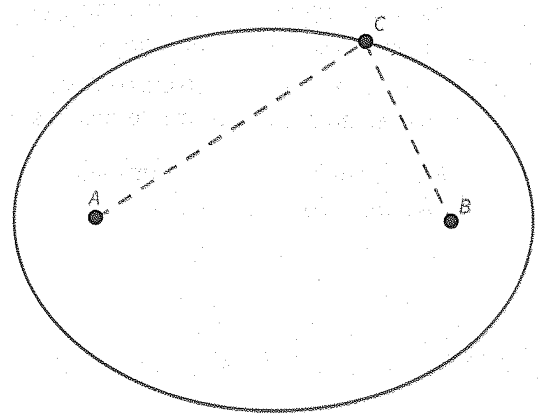

### Plano cartesiano

Para determinar una dirección cada ciudad tiene su propia estructura y nomenclatura, hay ciudades donde las calles tienen nombres numéricos u ordinales (Orizaba, Ver., Nueva York, EEUU, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas), hay lugares donde cada calle tiene el nombre de una persona o lugar (CDMX, Cuernavaca, Mor.) y hay lugares que basan sus direcciónes en lugares destacados por la población (Managua, Nicaragua). En el video puedes observar una de las aplicaciones del plano cartesiano en la construcción de una ciudad.

# Otros lugares geométricos: la elipse, la parábola y la hipérbola



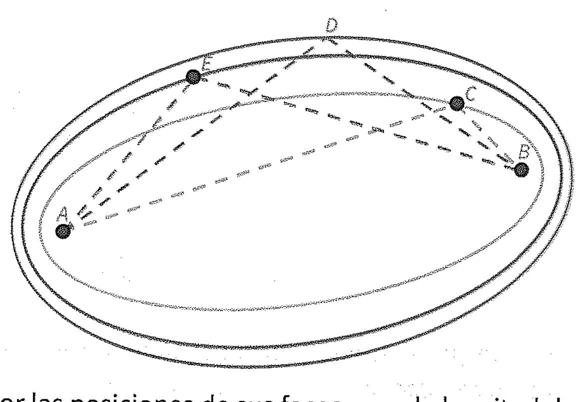
## Definición geométrica y construcción de la elipse




Al igual que hicimos con la circunferencia en el apartado anterior, comenzaremos con un ejemplo que motiva la definición geométrica y la construcción de curvas más sofisticadas.

Supóngase que tenemos nuevamente una cabra con una argolla en su collar, un pastizal muy grande en el que hemos clavado **dos** estacas y que en cada una de éstas hemos amarrado uno de los extremos de una cuerda (de tres metros) después de pasarla por la argolla de la cabra. Como cabe esperar, después de un par de horas la cabra ha devorado todo el pasto que estaba a su alcance ¿qué forma reconoceremos en el pastizal? ¿Cuál es el contorno del área devorada por la cabra?

Nota que cuando la posición de las dos estacas es la misma, ¡obtenemos una circunferencia con un radio de metro y medio! Pero por ahora concentrémonos en el caso donde las posiciones *A* y *B* de las estacas son diferentes.




La curva que hemos definido geométricamente de esta manera se llama **elipse** y los puntos *A* y *B* se conocen como **focos**. Posteriormente veremos que esta curva tiene otros puntos destacados y varios segmentos notables; pero veamos antes un poco más cómo se relacionan los elementos determinantes de la elipse entre sí.

Así como la circunferencia está determinada por su centro y su radio, resulta natural sospechar que una elipse quedará caracterizada por las posiciones de sus focos y por la longitud de la cuerda involucrada, la cual jugará un papel análogo al del radio.

## Actividad

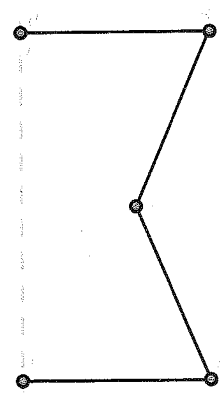
**Consigue un pedazo de cartón, tachuelas, pedazos de estambre de 10, 15 y 20 cm, tres marcadores de distintos colores y una regla de 30 cm.**

Amarra un extremo de un pedazo de estambre a una de las tachuelas y repite la operación con el otro extremo y la otra tachuela. Después de clavarlas en el cartón a 5 cm de distancia entre sí, desliza el marcador manteniendo tenso el estambre y da una vuelta completa alrededor de las tachuelas. Repite lo anterior manteniendo en la misma posición las tachuelas y tan sólo cambiando el estambre por otro de distinta longitud. Responde en tu cuaderno las preguntas después de discutirlas con tus compañeros.

1. Traza un segmento de recta entre los focos y prolóngalo por ambos lados hasta que toque a la elipse sin salirse de ésta. Repite la operación para las otras dos elipses. Mide las longitudes de los segmentos correspondientes y compáralas con las longitudes de los estambres, ¿son iguales? ¿A qué crees que se debe esto?
2. Coloca las tachuelas a 10 cm de distancia, ¿qué crees que obtendrás cuando traces la elipse con el estambre de 10 cm? Verifícalo sobre el cartón.
3. ¿Estarías de acuerdo con que cada punto de una elipse satisface que la suma de las distancias a los focos es una constante? ¿Por qué?

## Definición geométrica y construcción de la parábola

Ahora construiremos geométricamente una curva que, a diferencia de las anteriores, se extiende indefinidamente sobre el plano euclidiano. Para ello, considérese este problema: si tenemos un punto fijo donde se ubica un faro flotando en el mar *F* y la recta *d* representa la línea costera, ¿qué trayectoria describirá un barco (*B*) que, para no estrellarse con la costa ni con el faro, se mantiene a la misma distancia de ambos?



¡Claro, la distancia que estamos tomando entre el barco y la costa es la que elegiría cualquier marino de la tripulación nadando! Esto es, si representamos a la costa con una línea recta ($d$) y al barco lo ubicamos en $B$ primero y posteriormente en $B_1$, el marino recorrería la distancia que implica el menor esfuerzo e iría hacia la costa siguiendo una trayectoria recta y perpendicular a la línea costera, llegando en el primer caso a $E$ y posteriormente, si se arrojara al mar en $B_1$, a $E_1$.

Observa que, como dijimos en un principio, si el barco se aleja de la costa, la distancia aumentará, y este proceso puede continuarse tanto como lo deseemos (¡o tenga combustible el barco!).

La curva que describen las posiciones sucesivas del barco *B* se llama **parábola**, al punto *F* se le conoce como **foco** y a la línea recta *d* se le llama **directriz**. En la imagen anterior a la parábola la hemos trazado en rojo.

Las parábolas también pueden pensarse como la composición de dos movimientos, uno horizontal y otro vertical: así las concebía el filósofo natural italiano Galileo Galilei en 1633; sin embargo, las parábolas como objetos geométricos no eran cosas nuevas, los matemáticos griegos Euclides y Apolonio de Perga ya las habían estudiado antes, en el siglo III a. n. e.

## Actividad de aprendizaje 19

**En tu cuaderno traza dos rectas perpendiculares entre sí (al igual que los ejes coordenados X, Y, del plano euclidiano). Llama a la horizontal *e* (por eje) y a la vertical *d* (por directriz). Estas rectas se intersecan en un punto que llamaremos *D*.**

Escoge un punto *F* (que será el foco). En esta actividad veremos una manera de encontrar puntos (tantos como quieras) de la parábola con foco en *F* y directriz *d* usando sólo tu regla y tu compás.

1. El punto medio del segmento *DF*, ¿está en la parábola? (Piensa en la trayectoria seguida por el barco en la definición geométrica de esta curva.) Encuentra este punto en tu cuaderno y márcalo con **1**.

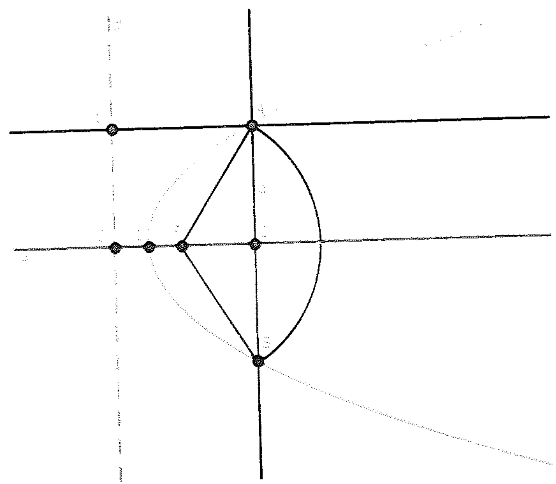
2. Marca otros cuatro puntos sobre la recta *e* y nómbralos como **2**, **3**, **4** y **5**. Trata de que no estén muy separados entre sí. Anota en la tabla las distancias entre *D* y cada uno de estos puntos.

| Puntos | Distancia |
|---|---|
| ***D*-2** | |
| ***D*-3** | |
| ***D*-4** | |
| ***D*-5** | |

3. Sobre cada uno de los puntos anteriores traza una recta perpendicular a la recta *e*. Cada una de estas rectas se identificará por el punto por el que pasa: así hablaremos de la recta 2, la recta 3, etcétera.

4. Con centro en $F$ y radio igual a la distancia "$D$-2", traza con tu compás el segmento de circunferencia que corta a la recta 2 en **dos** puntos, $A$ y $B$. Repite la operación con la distancia "$D$-3" y la recta 3. Haz lo mismo para los puntos 4 y 5.

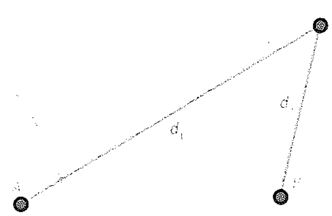
5. La distancia "$D$-2" es la distancia del barco a la costa de la definición geométrica de la parábola (sólo que la hemos medido sobre la recta $e$). En la ilustración siguiente correspondería a la distancia $CA$. Esta distancia la hemos elegido como radio de la circunferencia con centro en $F$ y hemos encontrado los dos puntos sobre la recta 2, $A$ y $B$, que están exactamente a la misma distancia de la recta $d$. Por lo tanto, ambos puestos están sobre la parábola con foco en $F$ y directriz $d$.



6. Repite el procedimiento anterior con los puntos restantes y posteriormente únelos para obtener la curva buscada.

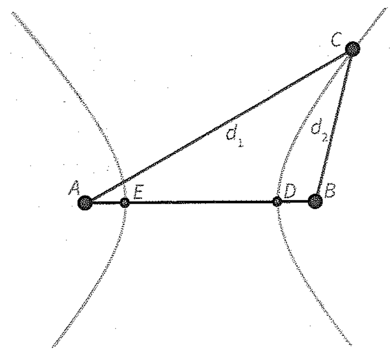
## Definición geométrica y construcción de la hipérbola

Hasta aquí hemos hablado de rectas, circunferencias, elipses y parábolas. La última curva que trataremos en nuestra exposición tiene una descripción ligeramente más sofisticada, pero no por ello difícil. Imagina que, como en el caso de la elipse, tenemos dos puntos fijos ($A$ y $B$) en el plano euclidiano y una longitud fija ($r \geq 0$) que desempeñará un papel análogo al del radio de la circunferencia.



De esta manera, un punto $C$ estará sobre la curva si el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos $A$ y $B$ (llamados **focos**) es constante e igual a $r \geq 0$. Es decir, $C$ estará sobre la curva si $r = |d_1 - d_2|$.

La magnitud $r \geq 0$ puede reconocerse fácilmente en el trazo anterior: si unimos $A$ y $B$ con un segmento y denotamos por $E$ y $D$ a las intersecciones de la curva con éste, tendremos que, dado que $D$ está en la curva, dist($A$, $D$) – dist($D$, $B$) = $r$. Asimismo, dado que $E$ está en la curva tendremos de la misma manera que dist($B$, $E$) – dist($A$, $E$) = $r$.

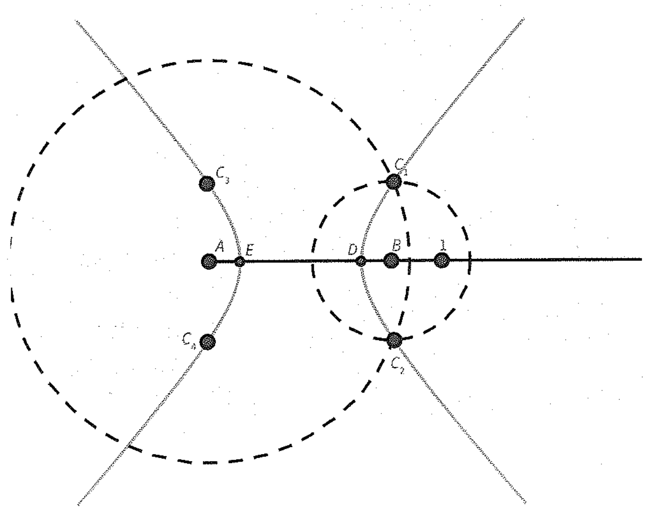


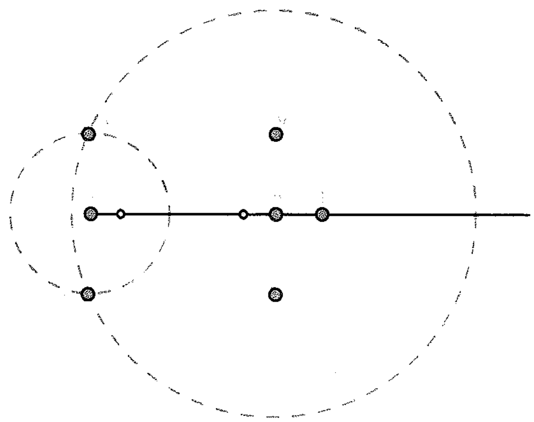

Sin embargo, dist($A$, $D$) = dist($A$, $E$) + dist($E$, $D$) y dist($B$, $E$) = dist($D$, $B$) + dist($E$, $D$), de modo que igualando las expresiones anteriores (ambas iguales a $r$) y sustituyendo las expresiones anteriores: dist($A$, $D$) – dist($D$, $B$) = dist($B$, $E$) – dist($A$, $E$); de modo que dist($A$, $E$) + dist($E$, $D$) – dist($D$, $B$) = dist($D$, $B$) + dist($E$, $D$) – dist($A$, $E$). Simplificando obtendremos que dist($A$, $E$) = dist($D$, $B$).

Retomando la expresión dist($A$, $D$) – dist($D$, $B$) = $r$, veremos que dist($E$, $D$) = $r$. De esta manera, vemos que si nos han dado los focos ($A$ y $B$) y $r \geq 0$, podemos encontrar $E$ y $D$. Basta con trazar el segmento $AB$, encontrar el punto medio (o **centro** de la curva) y trazar una circunferencia de radio $r/2$. Los puntos de intersección con el segmento $AB$ estarán en la curva. A estos puntos se les conoce como **vértices**.

A la curva que acabamos de describir se le conoce como **hipérbola** con focos en $A$ y $B$ y longitud $r$.

Para trazar varios puntos de la misma, a partir de que nos hayan dado únicamente los focos ($A$ y $B$), así como la longitud $r \geq 0$, debemos encontrar primero los vértices $E$ y $D$ como lo hicimos en los párrafos anteriores. Posteriormente, debemos encontrar sobre el segmento $AB$ un punto (que hemos denotado en la siguiente ilustración con **1**) y medir las distancias dist($E$, 1) y dist($D$, 1). La primera de ellas será el radio de una circunferencia con centro en el foco $A$, la segunda lo será de una circunferencia con centro en el foco $B$. Los dos puntos





de intersección (que hemos marcado por $C_1$ y $C_2$) estarán sobre la hipérbola: obsérvese que

$$\text{dist}(E, 1) - \text{dist}(D, 1) = \text{dist}(E, D) = r.$$

Intercambiando los papeles de $A$ y $B$, pero usando las mismas magnitudes, podemos encontrar otros dos puntos $C_3$ y $C_4$. Continuando de esta manera, observamos que la hipérbola está formada por dos ramas que son simétricas con respecto al eje que une a los focos y también con respecto a la recta perpendicular a éste y que pasa por el centro.

### Actividad

**Con base en lo aprendido, traza las hipérbolas en tu cuaderno. Di en qué punto del plano está ubicado el centro y cuáles son los vértices. Si se te proporcionan éstos di cuál es el valor de $r \geq 0$.**

1. Tiene focos en $A(0, 1)$, $B(0, 5)$ y $r = 2$.
2. Tiene focos en $A(-3, 3)$, $B(3, 3)$ y sus vértices en $E(-2, 3)$ y $D(2, 3)$.
3. Tiene focos en el origen y en $B(6, 0)$. Un vértice está en $E(2, 0)$ y el centro en $M(3, 0)$.
4. Tiene centro en el origen, un foco en $A(-6, 0)$ y un vértice en $D(2, 0)$.
5. Tiene centro en $M(0, 4)$, un foco en $A(-4, 4)$ y un vértice en $D(2, 4)$.


### Rectas y puntos

¿Te gustan los cuentos?, ¿alguna vez has visto elementos geométricos en una hoja milimétrica e imaginado su historia?

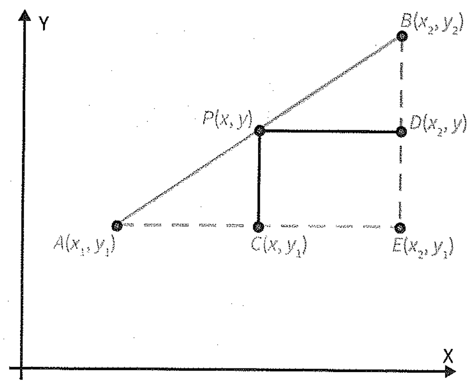
Este recurso te muestra el resultado obtenido del cruce entre planos y rectas. En matemáticas todo se conecta y al estudio de las propiedades geométricas con herramientas algebraicas se le conoce como geometría analítica.

# La longitud de segmento, el punto medio, la perpendicular a un segmento, entre otras

## Punto medio

El punto medio $P$ del segmento que tiene por extremos a los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, es:

$$P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$




Estas fórmulas se deducen con el análisis siguiente:

1. Por un lado, el segmento $BD$ mide $y_2 - y$ pero también es igual a la mitad de la longitud de $BE$, por lo tanto, $y_2 - y = \frac{y_2-y_1}{2}$.
2. De esta fórmula despejamos $y$:

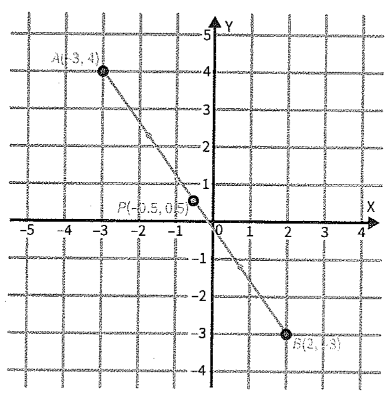
$$y_2 - y = \frac{y_2-y_1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(y_2 - y) = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad 2y_2 - 2y = y_2 - y_1$$

$$\Rightarrow \quad 2y_2 - y_2 + y_1 = 2y \quad \Rightarrow \quad y_2 + y_1 = 2y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{y_2+y_1}{2}$$

3. Repetimos el análisis para $x$.

### Ejemplo

Utilizando las fórmulas anteriores obtendremos el punto medio del segmento que tiene por extremos a $A(-3, 4)$ y $B(2, -3)$.




Para $x$: $$x = \frac{-3+2}{2} = \frac{-1}{2} = -0.5$$

Para $y$: $$y = \frac{4+(-3)}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

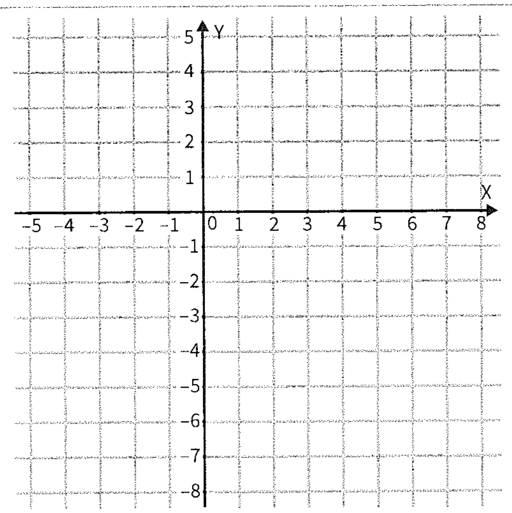
Por lo tanto, el punto medio es $P(-0.5, 0.5)$.

## Actividad

**Para repasar lo aprendido lleva a cabo esta actividad.**

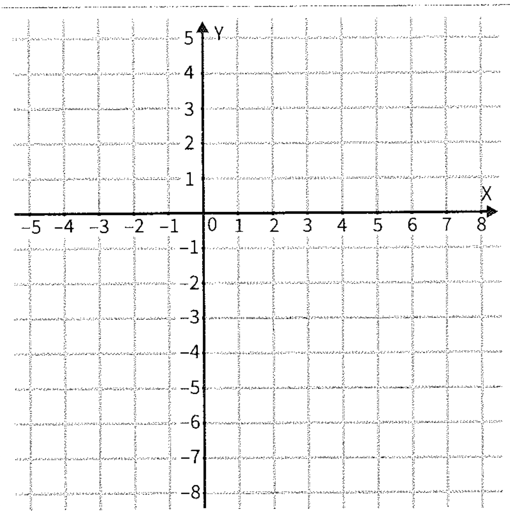
1. Calcula el punto medio de los segmentos que tienen por extremos los puntos $A$ y $B$.

| | |
|---|---|
| $A(-4, 1)$ y $B(4, 3)$ | |
| $A(1, 5)$ y $B(5, 3)$ | |
| $A(-2, 5)$ y $B(2, -5)$ | |
| $A(3, -7)$ y $B(-3, -8)$ | |
| $A(-5, -5)$ y $B(4, -2)$ | |
| $A(0.5, -7)$ y $B(4, 2)$ | |




2. Halla el extremo $B$ de los segmentos, sabiendo que parten de $A$ y el punto medio es $P$. Grafícalos en el plano.

| | |
|---|---|
| $A(3, 5)$ y $P(3, 3)$ | $B($ , $)$ |
| $A(-4, 5)$ y $P(-1, 3)$ | $B($ , $)$ |
| $A(-5, -3)$ y $P(0, -3)$ | $B($ , $)$ |
| $A(-4, 0)$ y $P(-2, -3)$ | $B($ , $)$ |
| $A(1, -6)$ y $P(3, -2.5)$ | $B($ , $)$ |
| $A(3, -8)$ y $P(-0.25, -7)$ | $B($ , $)$ |




3. Deduce la fórmula para hallar la coordenada $x$ del punto medio de un segmento que tiene por extremos a $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

4. Retomando la figura del punto medio, ¿por qué podemos garantizar que la coordenada $y$ del punto $D$ es justo la coordenada $y$ del punto medio?

# División de un segmento en una razón dada

## Dividir a un segmento en una razón dada

Partiremos de la pregunta: ¿qué significa que un punto divida a un segmento en una razón?

Si tomamos un punto $P$ de un segmento con extremos $A$ y $B$, éste queda dividido en dos segmentos: $AP$ y $PB$. La **razón** en la que divide el punto $P$ al segmento $AB$ es el cociente $r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ . En este tema debes prestar especial atención al inicio y al final de los segmentos.

**Recuerda que...**

**La razón es una comparación de dos cantidades por medio de una división.**

### Ejemplos

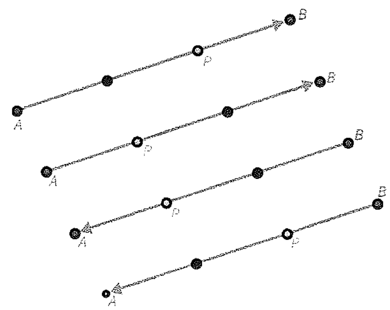
En la imagen se muestran los segmentos dirigidos $AB$ y $BA$, nota cómo cambia la razón.

Si el punto $P$ divide a $AB$ de manera que $AP$ es el doble de $PB$, la razón es 2.

Si el punto $P$ divide a $AB$ de manera que $AP$ es la mitad de $PB$, la razón es 1/2.

Si el punto $P$ divide a $BA$ de manera que $BP$ es el doble de $PA$, la razón es 2.

Si el punto $P$ divide a $BA$ de manera que $BP$ es la mitad de $PA$, la razón es 1/2.

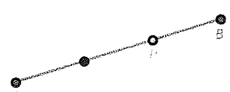


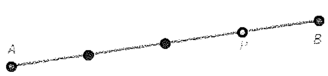
## Actividad de aprendizaje 22

**Responde lo que se pide, utilizando el conocimiento adquirido.**

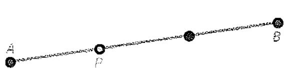
1. Efectúa el cociente $AP/PB$ e identifica la razón en la que $P$ divide al segmento $AB$.

a.  $r =$

b.  $r =$

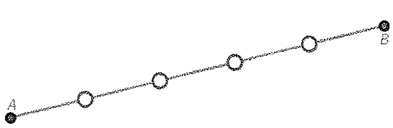
c.  $r =$

d.  $r =$

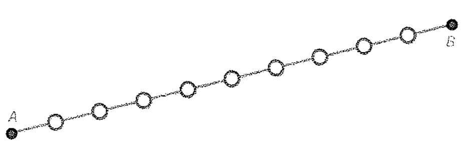
e.  $r =$

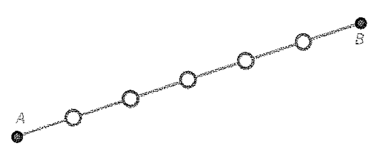
f.  $r =$

2. Colorea el punto que divide al segmento en la razón indicada.

a.  $r = 2/3$

b.  $r = 5$

c.  $r = 1/5$

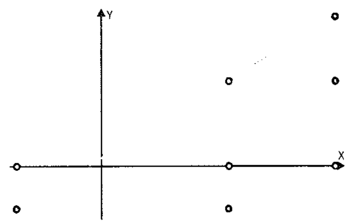
d.  $r = 2$

3. Observa las imágenes, así como las razones dadas y responde las preguntas.

¿Cuántas veces cabe el segmento $AP$ en $PB$ si $P$ divide a $AB$ en una razón de 4?

Si $P$ divide a $AB$ en una razón de 3/4, ¿cuántas veces cabe $AP$ en $PB$? Considera dividir $AB$ en siete partes iguales.

Los
son los que tienen ángulos iguales y lados proporcionales.




Para hallar las coordenadas del punto $P(x, y)$ nos basaremos en la figura de la izquierda. Por tener triángulos obtenemos:

$$r=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{PF}}=\frac{x-x_1}{x_2-x}.$$

De esta relación despejamos $x$. Con un razonamiento análogo para $y$ obtenemos dicha coordenada (dichos despejes quedan como tarea) y así concluimos que dado un segmento $AB$ y un punto $P$ sobre él, que lo divide en una razón $r$, el punto $P$ queda determinado así:

$$P\left(\frac{x_1+x_2r}{1+r},\frac{y_1+y_2r}{1+r}\right), \text{ donde } A(x_1, y_1) \text{ y } B(x_2, y_2).$$

### Ejemplo

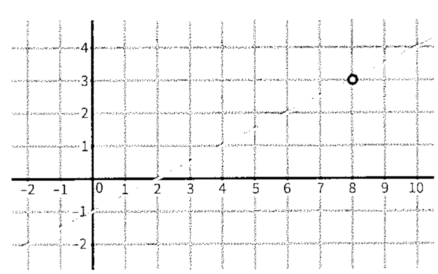
Hallaremos las coordenadas del punto $P$ que divide al segmento cuyos extremos son $A(-4, -3)$ y $B(12, 5)$, en una razón $r = 3$.

Para $x$:

$$x=\frac{-4+(12)(3)}{1+3}=\frac{-4+36}{4}=\frac{32}{4}=8$$

Para $y$:

$$y=\frac{-3+(5)(3)}{1+3}=\frac{-3+15}{4}=\frac{12}{4}=3$$




Por lo tanto, el punto que divide a $AB$ en una razón de 3 es $P(8, 3)$.

## Actividad de aprendizaje 23

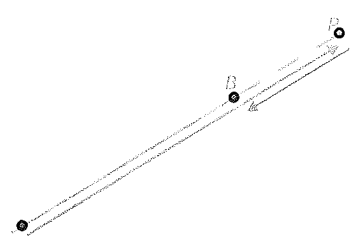
**Practica lo aprendido con la actividad. Recuerda que puedes regresar unas páginas si necesitas aclarar dudas.**

1. Halla las coordenadas de los puntos que dividen a los segmentos en las razones indicadas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. $A(-3, 2)$, $B(3, 0)$ y $r = 1$ | $P($ , $)$ | b. $A(7, 5)$, $B(1, 2)$ y $r = 0.5$ | $P($ , $)$ |
| c. $A(1, -3)$, $B(7, 3)$ y $r = 5$ | $P($ , $)$ | d. $A(7, 3)$, $B(1, -3)$ y $r = 5$ | $P($ , $)$ |
| e. $A(1, -3)$, $B(7, 3)$ y $r = 1/5$ | $P($ , $)$ | f. $A(7, 3)$, $B(1, -3)$ y $r = 1/5$ | $P($ , $)$ |
| g. $A(-1.5, -2)$, $B(-12, -9)$ y $r = 2.5$ | $P($ , $)$ | h. $A(-10, -1)$, $B(4, -8)$ y $r = 0.75$ | $P($ , $)$ |
| i. $A(-13, 2)$, $B(-5, 10)$ y $r = 7$ | $P($ , $)$ | j. $A(-12, 10)$, $B(-7.5, 5.5)$ y $r = 3.5$ | $P($ , $)$ |

2. Grafica los puntos en tu cuaderno, mide los segmentos $AP$ y $PB$, efectúa el cociente $AP/PB$ y compara tus respuestas con la razón dada.
3. Efectúa los despejes de $x$ y de $y$ de la explicación anterior.
4. Halla la razón en la que el punto $P$ divide a los segmentos $AB$.

Dado un segmento $AB$, un punto $P$ lo divide en una razón negativa si éste está fuera del segmento y sobre la recta que contiene a $AB$. La razón queda determinada por el cociente de las longitudes $r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$, pero observa que las direcciones de los segmentos son contrarias, por lo que el signo de $r$ es negativo.

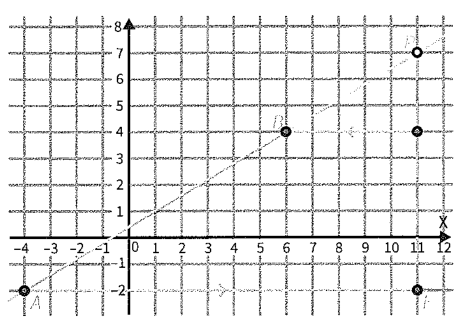



### Ejemplo

Para determinar la razón en la que $P$ divide a $AB$, primero identificamos las coordenadas de $A$, $B$ y $P$:

$$A(-4, -2),\ B(6, 4) \text{ y } P(11, 7).$$

Luego, utilizando la semejanza de triángulos escribimos la razón en términos de los catetos y por último sustituimos los valores.




$$r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{FB}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{11 - (-4)}{6 - 11} = \frac{15}{-5} = -3.$$

Observa cómo la dirección de los segmentos es fundamental cuando se calcula la razón. Si en vez de calcular $FB$ calculamos $BF$ la razón habría sido positiva y eso estaría equivocado.

## Actividad

**Practica lo aprendido de razones negativas con la actividad.**

1. Halla la razón en la que el punto $P$ divide a los segmentos $AB$.

$A(0, -3)$, $B(8, 1)$, $P(-4, -5)$

$A(-4, 3)$, $B(-1, -3)$, $P(0, -5)$

$A(-1, -3)$, $B(0, -5)$, $P(-4, 3)$

$A(-4, -4)$, $B(0, 0)$, $P(1, 1)$

$A(0, 1)$, $B(3, -5)$, $P(-2, 5)$

$A(-5, -2)$, $B(6, -2)$, $P(7, -2)$,

2. Halla las coordenadas del punto $P$ que divide al segmento $AB$ en la razón indicada.

$A(-4, 3)$, $B(-4, -4)$, $r = -8$

$A(3, -3)$, $B(-2, 0)$, $r = -1/2$

$A(5, 3)$, $B(2, 0)$, $r = -3/2$

$A(-4, 4)$, $B(-1, 4)$, $r = -3/2$

$A(-2, -6)$, $B(1, -4)$, $r = -2$

$A(4, 6)$, $B(-5, 2)$, $r = -1/4$

## Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si al intersecarse forman ángulos de 90°. En geometría analítica se pueden identificar a través de las pendientes. Recuerda todo lo aprendido en el tema Pendiente de una recta y responde la actividad.

Cerraremos el tema con esta afirmación:

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es $-1$.

## Actividad

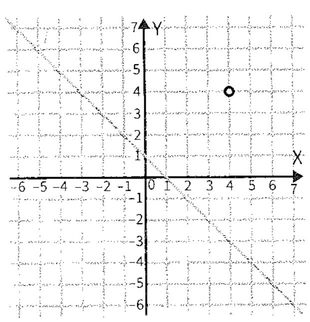
**Responde la actividad, teniendo cuidado con lo que se pide, pues tu objetivo principal es hacer una deducción de los datos obtenidos. Enfócate y no te distraigas, para evitar errores.**

1. Responde las preguntas.

¿Qué es la pendiente de una recta?

Escribe la fórmula para calcular la pendiente de una recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

¿Cómo calculas la pendiente de una recta si conoces su ecuación $Ax + By + C = 0$?




2. Observa la imagen y lleva a cabo lo que se pide.

Menciona cinco puntos por los que pasa la recta $l$.

¿Cuál es la pendiente de la recta $l$? Llámale $m_1$.

Utiliza tu escuadra para trazar la recta perpendicular a $l$ que pasa por el punto $A(4, 4)$.

d. Señala cinco puntos por los que pasa esta recta y calcula su pendiente.

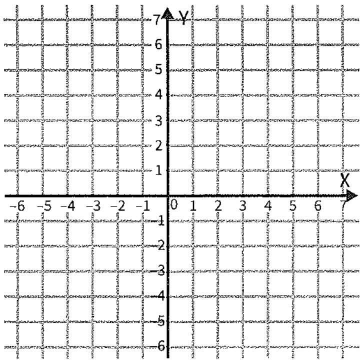
e. Calcula el producto $m_1 m_2$.

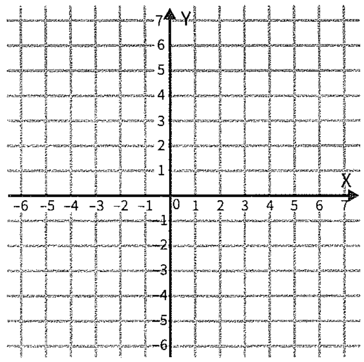
3. Traza en los planos las rectas señaladas. Posteriormente, con tu escuadra, traza la recta perpendicular a cada una de ellas que pasa por el punto señalado, calcula las pendientes y el producto $m_1 m_2$.

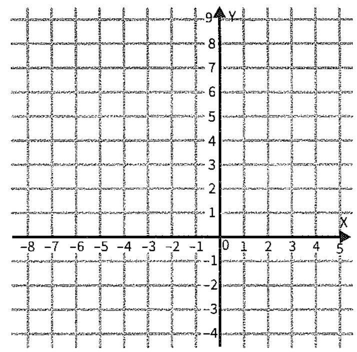
a. $2x - 3y + 9 = 0$, $P(3, -5)$

b. $2x - y + 2 = 0$, $P(-4, 5)$

c. $5x + 4y + 2 = 0$, $P(-7, -2)$







$m_1 =$ ——, $m_2 =$ ——  $m_1 =$ ——, $m_2 =$ ——  $m_1 =$ ——, $m_2 =$ ——

$m_1 m_2 =$  $m_1 m_2 =$  $m_1 m_2 =$

4. Anota tus observaciones de la actividad.

______________________________

______________________________

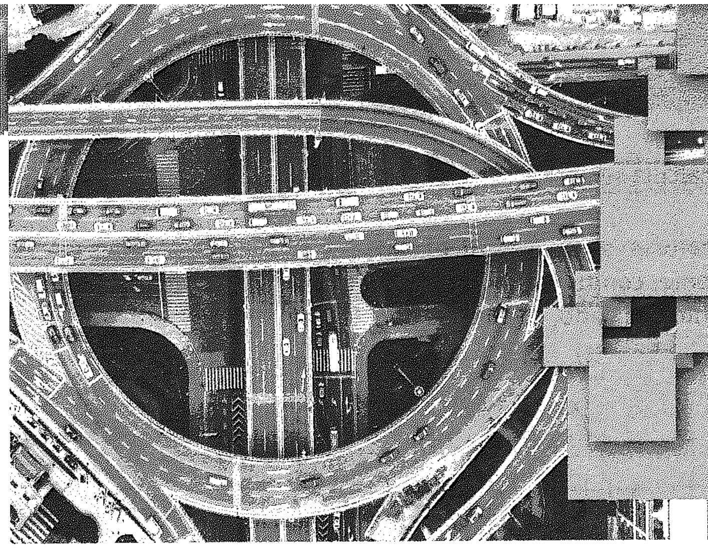
______________________________

## Actividad de aprendizaje 26

Productos esperados

**Esta actividad pertenece a tu portafolio de evidencias, debes hacerla en hojas separadas y conservarla.**

1. Dibuja en papel milimétrico los ejes coordenados y traza una recta.
2. Selecciona tres puntos fuera de la recta y traza las perpendiculares que pasan por esos puntos.
3. Sólo viendo el dibujo di cuál es la pendiente de la primera recta trazada y cuáles son las pendientes de las rectas perpendiculares.
4. Responde: ¿Existe alguna relación entre la pendiente de la recta inicial y una de sus perpendiculares? ¿Cómo son las pendientes de las rectas perpendiculares?



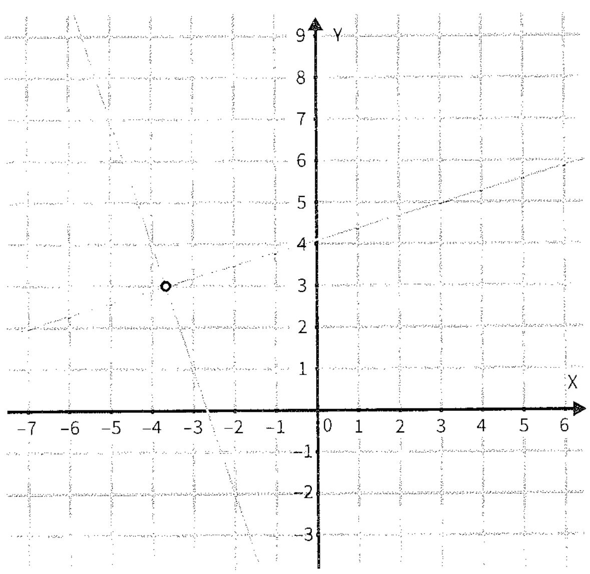
# Intersección de rectas y demás lugares geométricos

Los lugares geométricos satisfacen ciertas características. Por ejemplo, la recta es el lugar geométrico cuyos puntos satisfacen una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, mientras que la circunferencia son los puntos que satisfacen una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$. También la elipse, la parábola y la hipérbola pueden describirse como ecuaciones cuadráticas, es decir, que pueden describirse como objetos algebraicos y esto nos sirve para hablar de ellos sin necesidad de un dibujo.

Por ejemplo, en geometría euclidiana, cuando hablabas de una circunferencia era necesario dibujarla, sin embargo, ahora basta decir $x^2 + y^2 = 25$ para saber que hablamos de una circunferencia con radio 5 y centro en el origen.

Por ahora utilizaremos dichas expresiones algebraicas para determinar los puntos de intersección de ellas, con precisión, es decir, sin el error de un dibujo.

### Ejemplo




Encontraremos el punto de intersección de las rectas $3x - 10y + 41 = 0$ y $3x + y + 8 = 0$.

Las rectas están dibujadas en la figura y queremos hallar las coordenadas del punto de intersección. Si vemos el dibujo podemos decir que el punto es "más o menos" (−3.55, 3) o "por ahí cerquita", pero eso no nos sirve. Nosotros queremos el punto exacto. Tener la certeza de las coordenadas del punto de intersección.

Para hallar dicho punto debes observar que pertenece a ambas rectas, es decir que **satisface ambas ecuaciones**, así que deberás resolver un sistema de ecuaciones como lo hiciste en tu curso de álgebra.

Utilizando el método de reducción obtenemos:

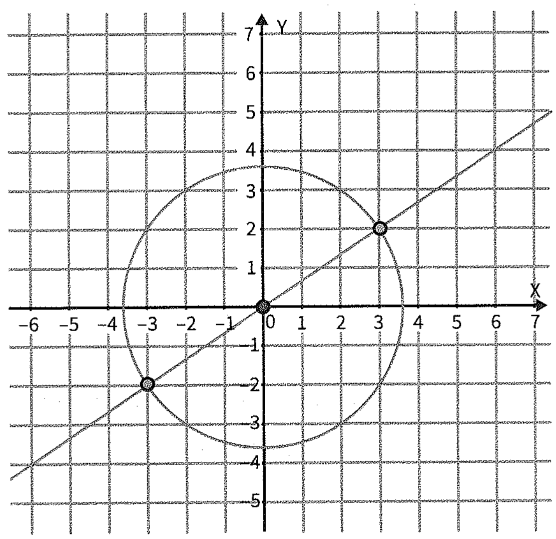
$$\begin{array}{rcrcrcl} & 3x & - & 10y & + & 41 & = 0 \\ - & 3x & + & y & + & 8 & = 0 \\ \hline & & - & 11y & + & 33 & = 0 \end{array}$$

Así, $y = 3$. Luego, sustituyendo este valor en alguna de las ecuaciones obtenemos que $x$ es $-\frac{11}{3}$.

¿Qué ocurre si ahora buscamos el punto de intersección entre una recta y una circunferencia? En realidad las cosas pueden complicarse dependiendo de los datos con los que contemos, sin embargo, lo que buscamos es lo mismo: los puntos que satisfacen ambas ecuaciones.

### Ejemplo

Hallaremos los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 13$ y la recta $2x - 3y = 0$.




Despejamos $x$ de la ecuación de la recta:

$$x = \frac{3y}{2}.$$

Sustituimos este valor en la ecuación de la circunferencia y reducimos la expresión:

$$\left(\tfrac{3y}{2}\right)^2 + y^2 = 13$$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{3y}{2}\right)^2 + y^2 = 13$$

$$\Rightarrow \tfrac{9y^2}{4} + y^2 = 13$$

$$\Rightarrow 9y^2 + 4y^2 = 52$$

$$\Rightarrow 13y^2 = 52.$$

Despejamos $y$:

$$y = \sqrt{\tfrac{52}{13}} = \sqrt{4} = 2 \text{ o}$$

$$y = -\sqrt{\tfrac{52}{12}} = -\sqrt{4} = -2.$$

Sustituyendo este valor en la expresión de $x$:

$$x = \tfrac{3(2)}{2} = 3 \text{ o}$$

$$x = \tfrac{3(-2)}{2} = -3.$$

Así, los puntos de intersección serán (2, 3) y (–2, –3).

## Actividad de aprendizaje 27

**Pon en práctica lo aprendido en este tema y responde lo que se pide.**

1. Halla la intersección de las rectas. Di si son perpendiculares o paralelas, o ninguna de las dos.

a. $x + 2y = 8$ y $-2x + 3y = 12$
b. $-3x + 8y = 28$ y $4x - y = -18$
c. $-2x + y = 4$ y $4x + y = -8$
d. $2x + y = 0$ y $-2x + y = 0$
e. $9x + y = 1$ y $27x + 3y = 2$
f. $5x + y = -3$ y $x - 5y = 2$

2. Halla los puntos de intersección entre las circunferencias y las rectas indicadas.

$x^2 + y^2 = 25$, $x - 7y = -25$
$x^2 + y^2 = 100$, $8x + 4y = 80$
$x^2 + y^2 = 100$, $3x + 4y = 0$
$x^2 + y^2 + 8x - 16y = -55$, $8x - 4y = -44$
$x^2 + y^2 - 6x + 4y = -5$, $-x + y = -1$
$x^2 + y^2 - 6x = 4$, $x + 5y = -10$

3. Halla las intersecciones de las circunferencias.

$x^2 + y^2 + 4x = 0$ y $x^2 + y^2 = 8$
$x^2 + y^2 - 4x - 10y = -25$, $x^2 + y^2 - 14x - 10y = -45$
$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 5$, $x^2 + y^2 - 4x + 4y = -3$
$x^2 + y^2 + 4x - 8y = -12$, $x^2 + y^2 + 6x - 10y = -32$
$x^2 + y^2 - 6y = -8$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y = -16$
$x^2 + y^2 - 4x - 6y = -12$, $x^2 + y^2 - 4x = 6$

4. Halla la intersección entre las parábolas y las rectas.

a. $x^2 - 4y = -4$, $x + 2y = 6$
b. $x^2 - 4y = -4$, $-x - y = 0$
c. $y^2 - 4x - 4y = 4$, $x + y = 0$
$y^2 - 4x - 4y = 4, x + y = 0$, $-x + 2y = 10$
$x^2 + 2x + 8y = -25$, $-2x + y = 7$
$x^2 + 2x + 8y = -25$, $y = -5$

5. Responde las preguntas.

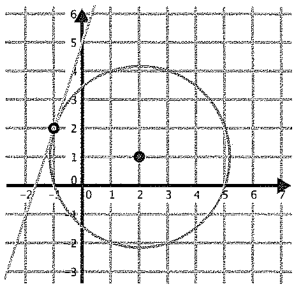
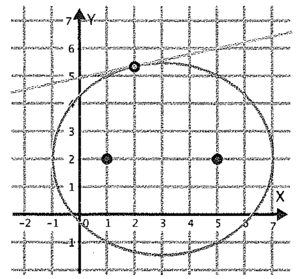
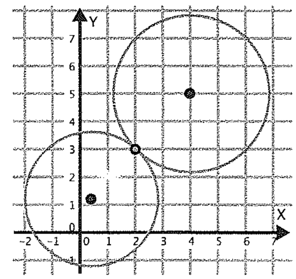
¿Cuántas intersecciones pueden tener dos rectas?

¿Cuántas intersecciones pueden tener dos circunferencias?

¿Cuántas intersecciones pueden tener una recta y una circunferencia?

Hablaremos del punto de tangencia de una manera intuitiva, pues formalizarlo no es objeto de estudio de un curso de geometría analítica.

Una recta es tangente a una curva si la toca en un único punto, llamado **punto de tangencia**, aunque también podemos extender el concepto a las circunferencias y definir cuándo dos de ellas son tangentes.

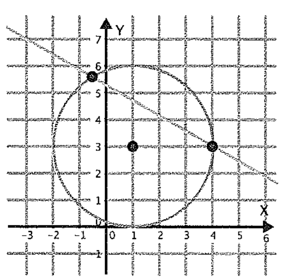
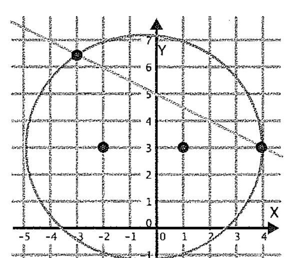
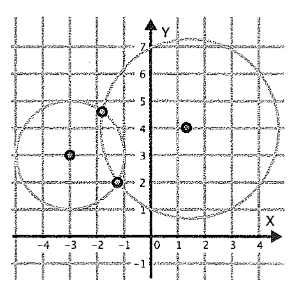
| El punto rosa es el punto de tangencia de la recta con la circunferencia. | El punto rosa es el punto de tangencia de la recta con la elipse. | El punto rosa es el punto de tangencia de las dos circunferencias. |
|---|---|---|
|  |  |  |

Sólo para reforzar el porqué se dijo que el concepto de tangencia se dio de manera intuitiva piensa en lo siguiente: ¿dos rectas que se intersecan en un punto son tangentes? La respuesta es no, sin embargo, con base en la definición debería ser un sí, por consiguiente, ¿cómo se ve una recta tangente a otra recta?

Claro que puedes pensar que se te está mintiendo, pero no, por ahora mientras te hablen de tangencia puedes pensar en los ejemplos anteriores y no será incorrecto.

## Rectas secantes

Una **recta secante** es una recta que corta a una curva en dos puntos. Aquí también es común hablar de circunferencias secantes y son las que se intersecan en dos puntos. A continuación se muestran ejemplos.

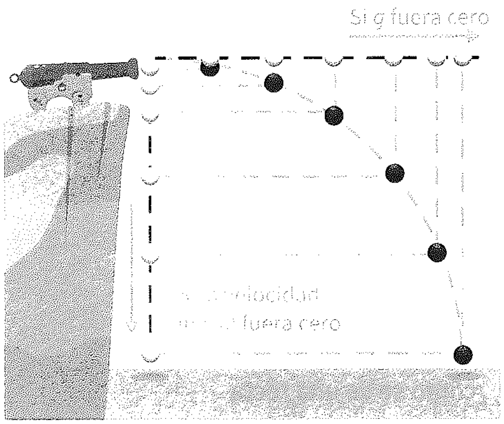
| Recta secante de una circunferencia. | Recta secante de una elipse. | Circunferencias secantes. |
|---|---|---|
|  |  |  |

## Actividad de aprendizaje 28

**Pon en práctica lo aprendido en este tema y realiza lo que se pide.**

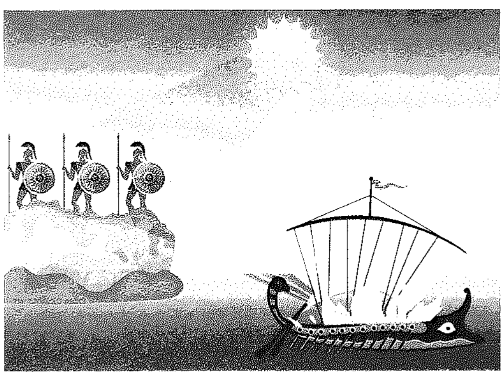
1. Determina si la recta $y = x$ es tangente o secante a $(x - 3)^2/4 + (y - 1)^2/3 = 1$.
2. Determina el punto tangente de $x^2 + y^2 = 8$ y $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 2$.
3. Determina dónde la secante $y = x - 2$ corta a $x^2 + y^2 = 4$.

## Suma anécdota




En el año 214 a. n. e., la ciudad griega de Siracusa, situada en la costa oriental de la isla de Sicilia, se rebeló contra el creciente poderío de Roma. El general romano Marco Claudio Marcelo, al frente de cuatro legiones y 68 barcos a remos, sitió la ciudad que se negaba a rendirse.

Entre los pobladores de Siracusa había uno que destacaba por su dedicación a las matemáticas y a la física. Entre sus logros había conseguido formular el principio de la balanza (dos masas guardan entre sí una razón que es inversamente proporcional a la razón de las distancias que las separan del fiel de la balanza) que continúa aplicándose en todos los mercados hoy en día; así como el principio que dice que al sumergir un cuerpo en un líquido con la misma densidad que éste, se derrama un volumen igual al del cuerpo.



El nombre de este habitante de Siracusa era Arquímedes (ca. 287 a. n. e. - 212 a. n. e.) y, sin lugar a dudas, fue uno de los científicos más destacados de la antigüedad.

Su conocimiento de las matemáticas y de las fuerzas de la naturaleza hicieron que los gobernantes de Siracusa (Epícides y su hermano Hipócrates) lo pusieran al frente del ejército siracusano. Arquímedes utilizó su conocimiento de la geometría para mejorar la capacidad de tiro de las catapultas y las balizas; así como para alinear espejos que concentraran los rayos solares en un solo punto, incendiando los navíos de la armada romana.

El resultado de lo anterior fue que los soldados siracusanos lograron mantener a raya, durante dos años, al ejército que se convertiría en la mayor maquinaria bélica de la antigüedad: el romano. Lo único que se necesitó fue de un conocedor de la geometría y de la física (como Arquímedes) y la confianza que depositaron en él los gobernantes y el pueblo de Siracusa.

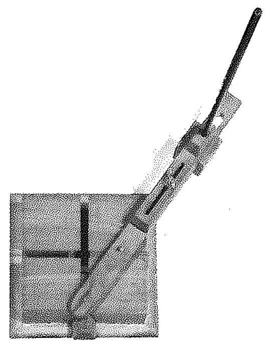
**Reflexiona las siguientes cuestiones.**

1. ¿Cómo hubieras reaccionado ante el ataque del general Marco?
2. En momentos de tensión o estrés, ¿has tenido alguna idea destacable?
3. ¿Crees que el uso de las matemáticas para fines militares está justificado?
4. ¿Las matemáticas pueden tener un impacto negatico o positivo en una persona?
5. ¿Crees que las matemáticas sean suficientes para acabar con problemáticas como la guerra o el hambre mundial?

## Proyecto integrador

**Es el final del primer parcial y deberás poner en práctica tus conocimientos.**

Construye un elipsógrafo o compás de Arquímedes, como el que se muestra en la imagen.



1. Organícense en equipos.
2. Investiguen lo que es un elipsógrafo o compás de Arquímedes. Descríbanlo a continuación.

_______________________________________________

_______________________________________________

_______________________________________________

3. Diseñen el plano de construcción en el espacio siguiente.

4. Redacten un reporte de la elaboración del elipsógrafo en el que incluyan las respuestas a las preguntas siguientes.
   a. ¿Por qué sirve el elipsógrafo?
   b. ¿Cuáles son los focos de la elipse?
   c. ¿Cuáles son las complicaciones que encontraron al elaborar el elipsógrafo?

## Evalúa tus evidencias

**Utiliza la lista de cotejo para identificar lo que dominas con base en las evidencias generadas y guardadas en tu portafolio.**

| Productos | Criterios | Sí | No |
|---|---|---|---|
| Colocar en un sistema cartesiano, tres lugares de la zona en la que vivo. Actividad 4. | Presentas información verídica, clara y basada en datos reales. | | |
| | Ubicas con precisión en el plano cartesiano cada lugar solicitado. | | |
| | Tu mapa contiene lugares plenamente reconocibles, de modo que cualquiera pueda orientarse con él. | | |
| Calcular la distancia más corta entre la escuela y mi casa. Actividad 8. | Presentas un mapa original, no reciclado y con mejor acabado que el de la actividad previa. | | |
| | Identificas cabalmente los conceptos de distancia en la geometría euclidiana. | | |
| | Identificas cabalmente las técnicas de medición en la métrica del taxista. | | |
| Representar en un plano dos rectas paralelas, encontrar sus ecuaciones. Actividad 13 | Trazas correctamente la recta solicitada y encuentras las intersecciones de manera correcta. | | |
| | Calculas la pendiente de la recta trazada y encuentras la ecuación idónea para tu recta paralela. | | |
| | Ubicas los puntos pedidos de la paralela y la trazas adecuadamente. | | |
| Dibujar en el plano dos circunferencias concéntricas, encontrar sus ecuaciones. Actividad 17. | Defines un centro para la familia de circunferencias que se busca. | | |
| | Dibujas correctamente las circunferencias solicitadas. | | |
| | Respondes las preguntas formuladas de manera razonada y coherente. | | |
| Localizar una recta en el plano y bosquejar su perpendicular por un punto dado. Actividad 26. | Trazas correctamente el plano cartesiano y la recta base para el ejercicio. | | |
| | Encuentras las perpendiculares que pasan por los puntos que has sugerido. | | |
| | Relacionas correctamente las pendientes de las perpendiculares con la de la recta original. | | |

## Rúbrica

**Con base en la rúbrica, identifica tu nivel logrado en cada aprendizaje esperado. Recuerda repasar los temas para mejorar.**

| Aprendizajes esperados | Básico | Autónomo | Estratégico |
|---|---|---|---|
| Caracteriza de forma analítica los problemas geométricos de localización y trazado de lugares geométricos. | Puedo hallar los lugares geométricos y visualizarlos evaluando las expresiones dadas. | Conozco los lugares geométricos viendo sus ecuaciones y puedo trazarlos evaluando las expresiones. | Identifico el tipo, orientación y puntos importantes de cada lugar geométrico, trazo las gráficas con los datos relevantes. |
| Ubica en el plano –en distintos cuadrantes– y localiza los puntos en los ejes y los cuadrantes mediante sus coordenadas. | Identifico el cuadrante al que corresponden las coordenadas. | Conozco en qué cuadrante se encuentra un punto sin dibujarlo en el plano. | Identifico la forma de las coordenadas sobre los ejes y fuera de ellos, sin necesidad de ponerlos en el plano. |
| Interpreta y construye relaciones algebraicas para lugares geométricos. Ecuación general de los lugares geométricos básicos. | Identifico los elementos de la ecuación general e interpreto el lugar geométrico que representa. | Conozco las características de cada lugar geométrico con su forma general, como su tipo y orientación. | Interpreto correctamente el lugar geométrico de una ecuación general y puedo deducir sus formas ordinarias y por ende sus elementos. |

# Segundo parcial

## Eje: Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.

| | | |
|---|---|---|
| • Sistema de referencia y localización: elementos de geometría analítica. | • Reconocimiento y construcción de los lugares geométricos: recta, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. | • ¿Qué tipo de lugares geométricos se precisan para tratar con rectas y cónicas, sus propiedades, puntos singulares, sus relaciones y sus transformaciones?<br>• ¿Cómo construir la ecuación de la circunferencia? ¿Qué propiedades tienen los puntos sobre una circunferencia? ¿Qué propiedades tienen los puntos sobre una circunferencia?<br>• Elementos históricos sobre la elipse, la parábola y la hipérbola. Trazado y propiedades. ¿Qué son las cónicas? |

- Caracteriza y distingue a los lugares geométricos según sus disposiciones y sus relaciones.

- Argumentar las diferencias visibles entre una recta y una parábola.
- Construir una elipse que describa el movimiento de la Tierra en torno al Sol.

# Habilidades socioemocionales

### Relaciona T

Para trabajar con: uno mismo

Tiempo de planeación: 10 min.

Duración estimada: 15 min.

Habilidades generales en entrenamiento: relación con los demás.

Habilidades específicas en entrenamiento: asertividad.

**Para reflexionar...**

¿Has hecho algo que no querías porque no supiste decir "no" a algunas personas? ¿Te has encontrado en alguna situación en la que querías decir "sí" o hacer algo que querías y no lo hiciste?, ¿cómo te sentiste?

**Nuestro objetivo:**

Identificar si somos capaces de hablar clara y honestamente, pedir lo que deseamos, y tener capacidad de decir sí o no.

**Condiciones y materiales deseables:**

Un lugar en el que te sientas en confianza y el siguiente cuestionario.

| Situación | Casi nunca | Algunas veces | Casi siempre |
|---|---|---|---|
| Puedo expresar mis sentimientos honestamente. | | | |
| Hago un elogio a un amigo/a cuando creo que lo merece. | | | |
| Puedo decir "no" sin sentirme culpable. | | | |
| Reconozco cuando cometo un error. | | | |
| Trato de encontrar la causa de mi enfado. | | | |
| Digo a una persona, que conozco muy bien, que me molesta alguna cosa de lo que dice o hace. | | | |
| Espero tener todos los hechos antes de tomar decisiones. | | | |
| Puedo decir "sí" cuando quiero hacer algo que quiero. | | | |
| Inicio una conversación con alguien desconocido/a. | | | |
| Me responsabilizo de mis propios sentimientos sin culpar a otros. | | | |
| Pregunto a alguien si le he ofendido. | | | |
| Resisto ante la insistencia de alguien para hacer algo que no quiero o me hace daño. | | | |
| Me opongo a una exigencia injusta de alguien con autoridad sobre mí. | | | |
| Si no estoy de acuerdo con alguien, no lo maltrato ni física ni verbalmente. | | | |
| Pido explicaciones a alguien que me ha criticado. | | | |
| Ofrezco soluciones a los problemas en lugar de quejarme. | | | |

**Paso a paso:**

1. Contestar el cuestionario anterior.
2. Una vez que contestes el cuestionario léelo y pregúntate:
   a. ¿De qué me doy cuenta después de analizar mis respuestas?
   b. ¿Soy claro en la forma en que me comunico?
   c. ¿Cómo puedo expresar mis emociones y pensamientos sin agredir a otros?

### Para terminar...

¿Cómo seré una mejor persona?, ¿cómo seremos una mejor comunidad?

La asertividad nos permite comunicarnos claramente y enviar a la persona correcta el mensaje que queremos expresar. Sé claro y directo en tu forma de comunicarte y te sorprenderás del efecto que esto tiene en las personas que te rodean.

# Proyecto de vida

**En el semestre desarrollaremos tu Proyecto de vida, con la finalidad de clarificar qué deseas para ti y tomes decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como reflexionar acerca de las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.**

Establecer metas y cumplir las definidas a corto plazo, y no perder de vista las a mediano y largo plazo puede ser difícil al inicio, sin embargo es importante no ceder a la apatía, a la desesperación por los factores que no dependen de uno y a la flojera. En esta sección es momento de darle seguimiento a tu Plan de vida. ¡Adelante!

1. Responde las siguientes preguntas.

   a. ¿Cuántas metas escribiste en tu organizador? Un problema frecuente es querer hacer todo al mismo tiempo y se resuelve aprendiendo a priorizar. Quizá quieras tocar la guitarra y aprender a pintar, pero no es necesario hacerlo al mismo tiempo, escoge una actividad y enfócate en ella. A continuación reescribe tus metas.

   ___

   ___

   ___

   b. De tu lista de metas, identifica las más importantes y ordénalas en prioridad. Identifica las que podrías hacer al finalizar el bachillerato o en el tercer año. No pierdas de vista que tu principal objetivo en este momento es concluir tus materias con calificación aprobatoria.

   Debo hacerlo ahora: ___

   Puede esperar al semestre siguiente: ___

   Puede esperar al año siguiente: ___

   c. ¿Identificas alguna meta que no incluiste anteriormente y te diste cuenta de su importancia? Puedes agregarla ahora sustituyéndola por alguna de las que tenías.

2. Evalúa tu organizador. Responde con honestidad en qué porcentaje cumpliste con tus objetivos e identifica el porqué.

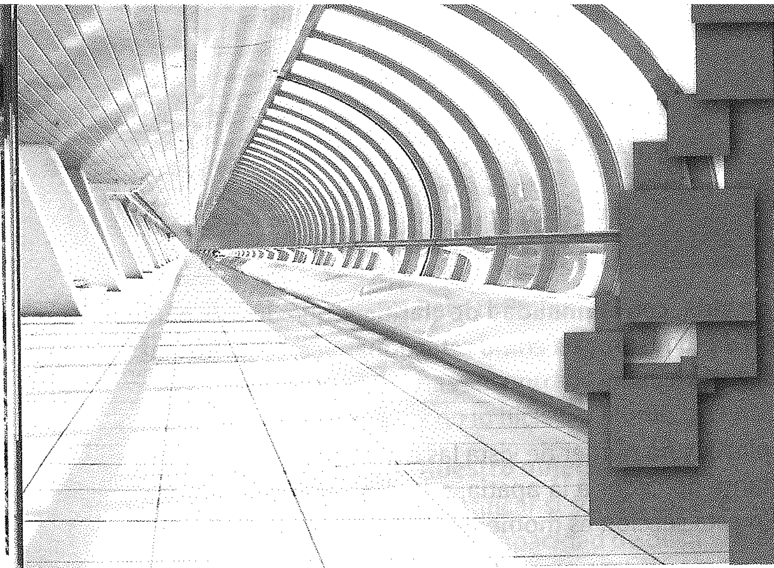
   ___

   ___

   ___

   ___

3. Elabora un nuevo organizador gráfico tomando en cuenta tus respuestas anteriores. Es importante que sea uno nuevo para tener claridad en tus metas y objetivos.



# ¿Qué tipo de lugares geométricos se precisan para tratar con rectas y cónicas, sus propiedades, puntos singulares, sus relaciones y sus transformaciones?

## Formas de la ecuación de la recta y sus transformaciones

### Formas de la ecuación de la recta y cómo ir de una a otra

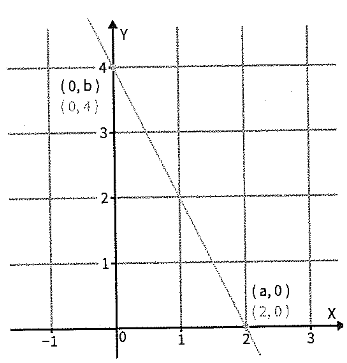
Las formas de la ecuación de una recta que veremos en este texto son tres.

| Forma general | Forma ordenada al origen | Forma simétrica |
|---|---|---|
| $Ax + By + C = 0,$ | $y = mx + b,$ | $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , |
| donde $-\frac{A}{B}$ es la pendiente y $-\frac{C}{B}$ es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Y. | donde $m$ es la pendiente y $b$ la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Y. | donde $(a, 0)$ y $(0, b)$ son los puntos de intersección de la recta con los ejes X y Y, respectivamente. |

Una vez que se tiene una de las formas anteriores, obtener las otras es sencillo.

**Ejemplo**

Dada la ecuación $2x + y = 4$, obtendremos las tres formas.




- La forma general se obtiene "pasando" el 4 al lado izquierdo para igualar a 0: $2x + y - 4 = 0$.

  Para obtener la forma ordenada al origen se despeja la variable $y$:

$$2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x.$$

- Para obtener la forma simétrica se hallan los valores $a$ y $b$.

  Como $a$ es la abscisa de la intersección con el eje X, sabemos que en ese punto $y = 0$, sustituyendo este valor en la forma ordvenada al origen obtenemos la expresión $0 = 4 - 2x$, de esta ecuación despejamos x obteniendo $x = 2$. Así $a = 2$.

El valor $b$ se encuentra haciendo $x = 0$, sustituyendo este valor en la forma ordenada al origen $y = 4 - 2(0)$, así $y = 4$, es decir, que $b = 4$.

De lo anterior, la ecuación simétrica es $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$.

| Forma general | Forma ordenada al origen | Forma simétrica |
|---|---|---|
| $2x + y - 4 = 0$ | $y = 4 - 2x$ | $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ |

### Ejemplo

Dada la ecuación simétrica $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$, hallaremos las otras formas.

Para la forma general:

$$\tfrac{x}{3}+\tfrac{y}{5}=1 \Rightarrow 3(\tfrac{x}{3})+3(\tfrac{y}{5})=3 \Rightarrow x+3(\tfrac{y}{5})=3 \Rightarrow 5x+5(3)(\tfrac{y}{5})=3(5) \Rightarrow 5x+3y=15 \Rightarrow 5x+3y-15=0$$

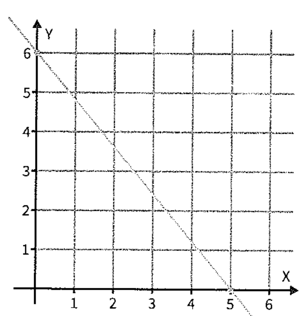
Para la forma ordenada al origen despejamos $y$ de la forma anterior:

$$5x+3y-15=0 \Rightarrow 3y=15-5x \Rightarrow y=\frac{15-5x}{3} \Rightarrow y=5-\tfrac{5}{3}x$$

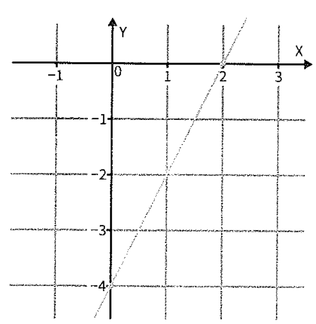
## Actividad de aprendizaje 1

**Lleva a cabo lo que se pide.**

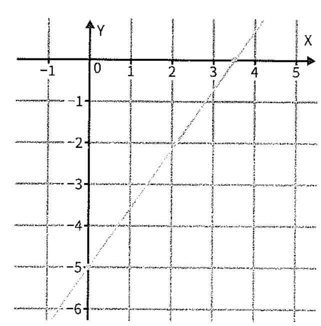
1. Respondan.
   a. De la ecuación general de una recta, ¿cómo obtenemos el valor de $x$ del punto $(x, y)$ que es el punto de intersección de la recta con el eje X? ____________________
   b. De la ecuación general de una recta, ¿cómo obtenemos el valor de $y$ del punto $(x, y)$ que es el punto de intersección de la recta con el eje Y? ____________________
2. En las imágenes marca los puntos de intersección de la recta con los ejes e indica el valor de $a$ y $b$.

a. 

$a =$ $b =$

b. 

$a =$ $b =$

c. 

$a =$ $b =$

3. Dadas las ecuaciones de primer grado de dos variables, determina los valores $a$ y $b$ que corresponden con las intersecciones de la recta con los ejes X y Y, respectivamente.

| | | |
|---|---|---|
| $3x + 2y = 6$ | $4x - 3y = 36$ | $-7x + y = 21$ |
| $-x - y = 1$ | $2x - 7 = 7y$ | $5 - x + y = 0$ |

4. Completa la tabla con la forma de la ecuación correspondiente.

| Forma general | Forma ordenada al origen | Forma simétrica |
|---|---|---|
| $x + y = 7$ | $y =$ | $1 =$ |
| $9x - 2y = 36$ | $y =$ | $1 =$ |
| $0 =$ | $y = -5x + 3$ | $1 =$ |
| $0 =$ | $y = \frac{2}{5}x - 5$ | $1 =$ |
| $0 =$ | $y =$ | $\frac{x}{3} + \frac{y}{4.5} = 1$ |
| $0 =$ | $y =$ | $\frac{x}{7} - \frac{y}{4} = 1$ |

## Ecuación de la recta dados dos puntos (punto-punto)

Cuando tenemos dos puntos de la recta, para hallar su ecuación se utiliza una fórmula llamada comúnmente "forma punto-punto", aunque ésta no es una forma de la ecuación.

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo

Hallaremos las formas de la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 5) y (−2, 2).

Identificando quién es $x_1$, quién $x_2$, quién $y_1$ y quién $y_2$ sólo basta sustituir en la fórmula y después hacer las cuentas para hallar la forma general y la forma ordenada al origen.

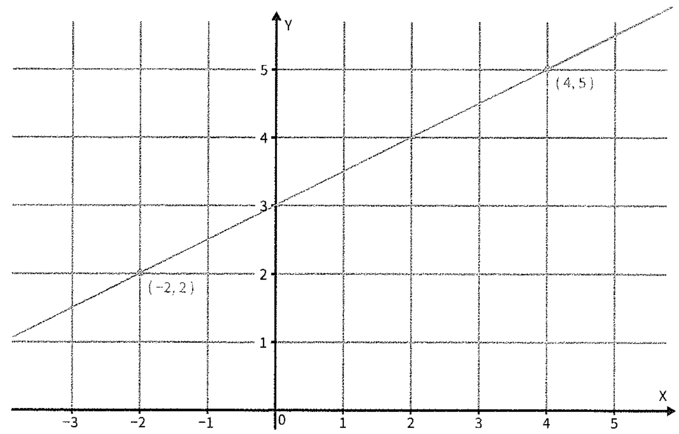
$x_1 = 4$ $\quad$ $x_2 = -2$ $\quad$ $y_1 = 5$ $\quad$ $y_2 = 2$

Sustituimos:

$$(y - 5) = \frac{2 - 5}{-2 - 4}(x - 4)$$

**Forma general.** Partimos de la expresión anterior y hacemos las cuentas.

$$(y-5)=\frac{2-5}{-2-4}(x-4)$$
$$(y-5)=\frac{-3}{-6}(x-4)$$
$$(y-5)=\frac{3}{6}(x-4)$$
$$(y-5)=\frac{3}{6}x-\frac{12}{6}$$
$$6(y-5)=3x-12$$
$$6y-30=3x-12$$
$$-3x+6y-18=0$$
$$-x+2y-6=0$$




| | |
|---|---|
| **Forma ordenada al origen.** De la expresión $6y - 30 = 3x - 12$ despejamos $y$: $$6y-30=3x-12$$ $$6y=3x-12+30$$ $$6y=3x+18$$ $$y=\frac{3x+18}{6}$$ $$y=\frac{1}{2}x+3$$ | **Forma sintética.** De las formas anteriores obtenemos el valor de $x$, cuando $y = 0$: $x = -6$. Este valor es $a$. Y el valor de $y$ cuando $x = 0$: $y = 3$. Este valor es $b$. De estos datos concluimos que la forma sintética es $\frac{x}{-6}+\frac{y}{3}=1$ . |

## Actividad de aprendizaje 2

**Responde lo que se pide.**

1. Escribe la forma punto-punto de las rectas.

| $P_1(x_1, y_1)$ | $P_2(x_2, y_2)$ | Forma punto-punto |
|---|---|---|
| (3, 2) | (11, −5 ) | |
| (−3, −7) | (1, 9) | |
| (0, 3) | (2, 0) | |
| (−10, 8.5) | (3.5, −4.5) | |
| (1.5, 9.2) | (7.2, −5.5) | |

2. De las formas punto-punto de la actividad anterior halla la forma general, la forma ordenada al origen y la forma sintética.

## Forma punto-pendiente

Si conocemos la pendiente $m$ y un punto $(x_1, y_1)$ de la recta entonces utilizamos la fórmula también conocida como forma punto-pendiente:

$$(y - y_1) = m(x - x_1).$$

Ejemplo

Hallaremos las formas de la ecuación de la recta que tiene pendiente 2/3 y pasa por el punto (6, 2).

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$y-2=\frac{2}{3}(x-6).$$

**Forma general.** Sustituimos los valores en la fórmula y obtenemos la fórmula general:

$$(y-2)=\frac{2}{3}(x-6)$$

$$(y-2)=\frac{2}{3}x-\frac{12}{3}$$

$$3(y-2)=2x-12$$

$$3y-6=2x-12$$

$$3y-2x+6=0$$

**Forma ordenada al origen.** Partimos de la sustitución de los valores en la fórmula:

$$(y-2)=\frac{2}{3}(x-6)$$

$$y-2=\frac{2}{3}x-\frac{12}{3}$$

$$y=\frac{2}{3}x-4+2$$

$$y=\frac{2}{3}x-2$$

**Forma sintética.** De las formas anteriores hallamos los puntos donde la recta interseca a los ejes:

Si y = 0, entonces:

$$3(0)-2x+6=0$$

$$-2x=-6$$

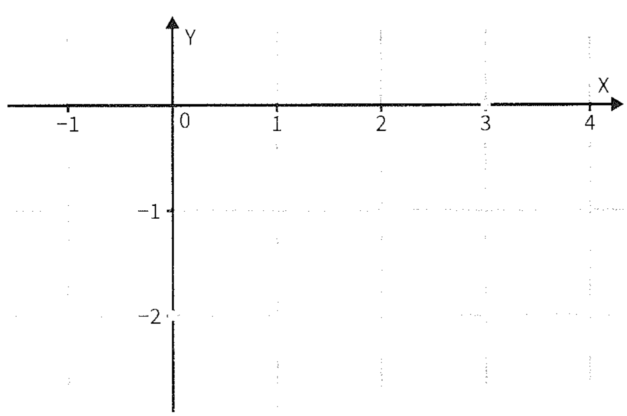
$$x=3$$

Si x = 0, entonces:

$$y=\frac{2}{3}(0)-2$$

$$y=-2$$

La recta interseca a los ejes en los puntos (3, 0) y (0, –2), así la ecuación sintética es $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$




Recapitulando, las formas de las ecuaciones son:

Forma general. $-2x + 3y + 6 = 0$

Forma ordenada al origen.
$$y=\frac{2}{3}x-2$$

Forma sintética. $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$

## Actividad de aprendizaje 3

**Responde lo que se pide.**

1. Completa la tabla con la ecuación en su forma punto-punto.

| $m$ | $P_1(x_1, y_1)$ | Forma punto-punto |
|---|---|---|
| $-2$ | $(-1, 1)$ | |
| $9$ | $(4, 6)$ | |
| $\frac{1}{3}$ | $(-4, -3)$ | |
| $-\frac{4}{3}$ | $(-2, 1)$ | |
| $\frac{5}{3}$ | $(7, 1)$ | |

2. De las formas punto-punto de la Actividad de aprendizaje 1 halla la forma general, la forma ordenada al origen y la forma sintética.

## Parámetros que determinan una recta

Para hallar la ecuación de una recta debemos conocer dos parámetros: su pendiente y un punto de ella.

### Ejemplo

Observa por qué estos parámetros definen una única recta.

Una recta con pendiente $m = 1/2$ puede ser cualquiera de las rectas de la Figura 1. En total tenemos infinitas rectas con pendiente igual a 1/2, por eso necesitamos saber un punto de la recta, con esa información tomamos una de estas rectas.

Por ejemplo, si la recta pasa por el punto $(-3, 1)$ entonces la recta en cuestión es la de la Figura 2.

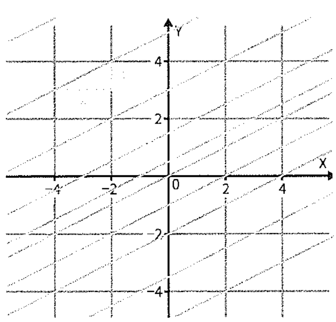


Figura 1

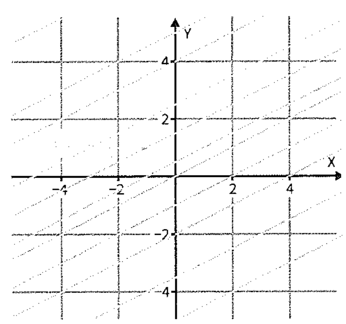


Figura 2

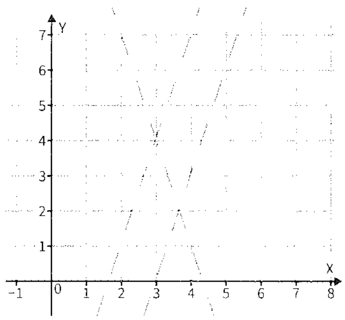
Observa que la recta que tiene pendiente 1/2 y pasa por el punto $(-3, 1)$ es única.

## Actividad de aprendizaje

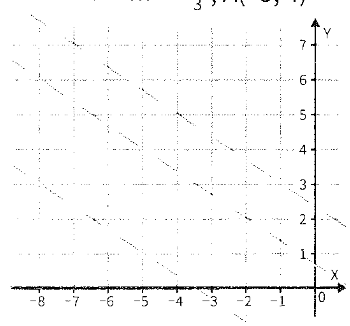
**Lleva a cabo lo que se pide.**

1. Pinta de rojo la recta de la que se trata según los parámetros indicados.

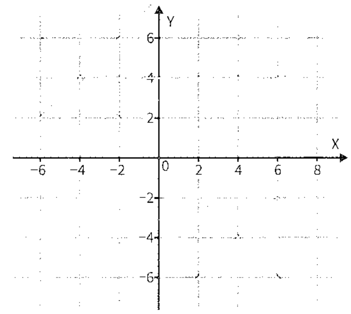
a. $m = 3$, A(3, 4)



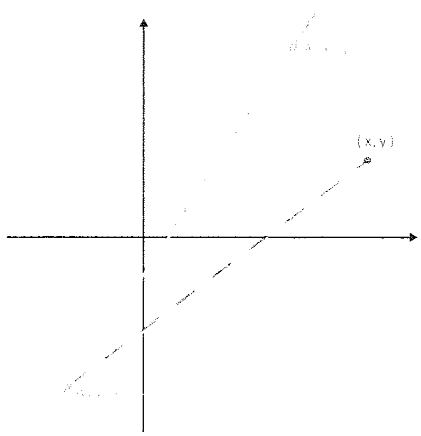

b. $m = -\frac{2}{3}$, A(−5, 4)




c. $m = 1$, (4, −4)




Para calcular la ecuación de una recta necesitamos conocer dos cosas: la pendiente y un punto. Si conocemos dos puntos de ella $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ la pendiente la calculamos con el cociente $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ y conocemos dos puntos de la recta, así que tenemos todo. Pero, ¿cómo lo hacemos?




Nota en la figura que si tomamos un punto cualquiera $P(x, y)$ dentro de la recta, los segmentos $PA$, $BP$ y $BA$ no cambian su inclinación, por lo que su pendiente no cambia. También nota que si ese punto $P(x, y)$ no está en la recta, el segmento que une a un punto de la recta con él sí cambia su inclinación. Es decir que $m_{AP} = m_{AB}$.

Calculamos las pendientes y las igualamos:

$$m_{AP} = \frac{y-y_1}{x-x_1}\ ,\ m_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ \text{ y }\ \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Luego multiplicamos por $x - x_1$ ambos lados y obtenemos la fórmula punto-punto:

$$(y-y_1) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Nota que el cociente del lado derecho no es más que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, así que si como dato nos dan a la pendiente $m$ y un punto $(x_1, y_1)$, basta sustituir ese cociente por $m$ y obtendremos la forma punto-pendiente.

$$(y - y_1) = m(x - x_1).$$

# Puntos y segmentos destacados en la circunferencia

En la página 30 mencionamos que la circunferencia con centro en $C(x_0, y_0)$ y con radio $r \geq 0$, comprendía todos los puntos $(x, y)$ del plano cartesiano que se encontraban a distancia $r$ del punto más destacado que tiene la circunferencia, su **centro** $C(x_0, y_0)$. Asimismo mostramos que la ecuación algebraica que refleja este hecho estaba dada por:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

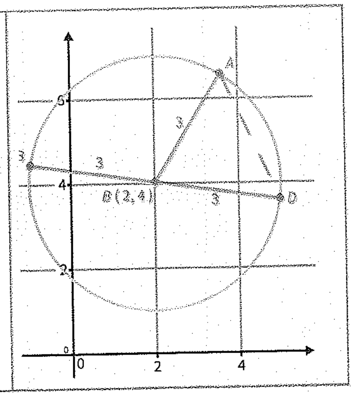
Ahora comenzaremos un estudio más detallado de algunos rasgos geométricos de la circunferencia. Para ello comenzaremos con algunas definiciones que utilizan lo que ya conocemos hasta aquí de recta. Por ejemplo, dada una circunferencia cualquiera y dos puntos $A$, $B$ sobre ésta, la **cuerda *AB*** es el único segmento de recta que los une. Si además, esta cuerda pasa por el centro $C$ de la circunferencia diremos que se trata de un **diámetro**. Finalmente, a cualquier segmento de recta que une el centro con otro punto de la circunferencia lo llamaremos un **radio**.

### Ejemplo

En esta imagen tenemos la circunferencia de radio 3 y centro en $C(2, 4)$. Los puntos $A$, $B$ y $D$ están sobre la misma.

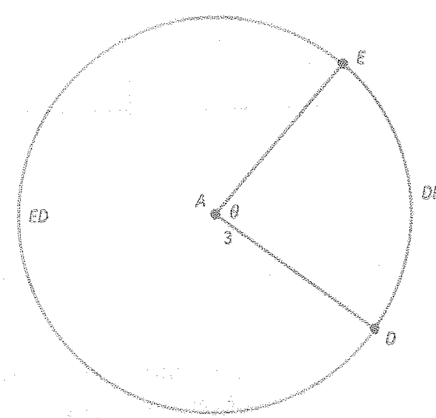
Identifica los tres radios que aparecen en la imagen. ¿Ves alguna(s) cuerda(s) de la circunferencia?

Si el punto $D$ está sobre la recta $BC$ (como en la imagen) ¿entonces $BD$ forma un diámetro? ¿Cuánto mide el segmento $BD$?




Observa que, derivado de lo hiciste en el ejemplo anterior, tendremos que cualquier radio medirá exactamente $r$, que la medida de cualquier diámetro será precisamente $2r$ y que dos radios formarán un diámetro si, y solamente si, se encuentran sobre la misma recta (en este caso diremos que son colineales).

Dos radios (no colineales) de la misma circunferencia determinan *dos* arcos de ésta. Un **arco** de circunferencia es un segmento sobre la misma, delimitado por dos puntos en ella, mientras que nos referiremos como **sector** al área delimitada por un arco de circunferencia y los dos radios sobre sus extremos.




Como vemos en la imagen de la derecha, tenemos (siguiendo el sentido de las manecillas del reloj) el arco $ED$ y el arco $DE$; así como los sectores $EAD$ y $DAE$.

Si conocemos la medida del ángulo $\theta$ (ya sea en grados o en radianes) entre los radios que delimitan un arco (o un sector) de circunferencia de radio $r$, resulta fácil obtener la medida del mismo; únicamente requerimos recordar la expresión para el perímetro (o el área) del círculo y hacer una regla de tres como sigue:

Para la longitud $M$ del arco, $M$ es a $\theta$ como el perímetro del círculo $2\pi r$ es a $2\pi$. De modo que $M = \theta r$.

Para el área $A$ del sector, $A$ es a $\theta$ como el área del círculo $\pi r^2$ es a $2\pi$. Es decir, $A = \theta r^2/2$.

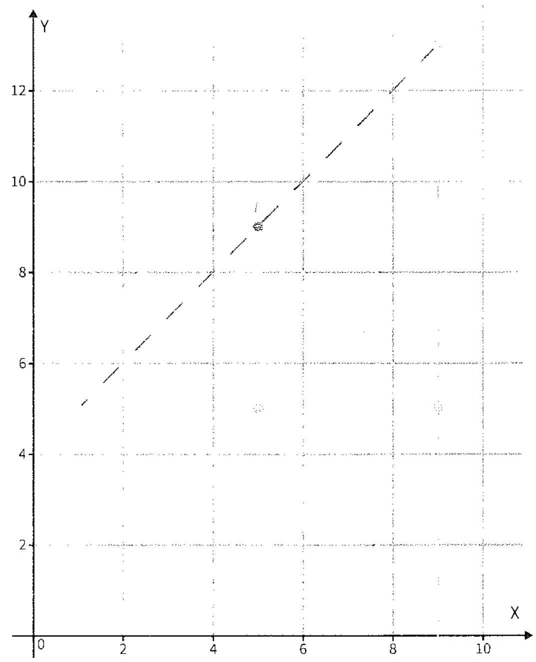
Recordemos que una vuelta completa de la circunferencia mide $2\pi$ radianes.

## Actividad

Resuelve los problemas.

1. La pendiende de la recta normal a la recta $4x - 2y = 5$ es:
   a. 4
   b. 2
   c. –4
   d. –2
2. La intersección con el eje X de la recta $y = 4x - 4$ es:
   a. –4
   b. 4
   c. 1
   d. –1
3. La ordenada al origen de la recta $2x - 3y + 6 = 0$ es:
   a. –6
   b. –4
   c. – 2
   d. 1

**Escribe en tu cuaderno las respuestas a las preguntas.**




1. En la figura de la izquierda tenemos la circunferencia de radio $r_0 = 4$ y centro en $C(5, 5)$ (¿cuál es su ecuación?) Hemos trazado la recta tangente a ésta en $D(9, 5)$ y prolongado la cuerda que pasa por $B(1, 5)$ y $E(5, 9)$ hasta que interseque a la tangente en $A$. ¿Observas alguna otra cuerda o algún diámetro?
2. Convéncete, utilizando la distancia entre puntos, que la distancia entre $B$ y $E$ es la misma que la que hay entre $D$ y $E$, así como entre los puntos $E$ y $A$. De esta manera, si trazáramos una circunferencia con centro en $E(5, 9)$ y radio $r_1 = \text{dist}(B, E)$ ¿cuál sería la ecuación de esta circunferencia? ¿Pasaría por el punto $D$? ¿Por el punto $A$? Observa que puedes responder a estas preguntas mediante la definición de circunferencia o directamente con la ecuación que obtuviste.
3. Identifica las cuerdas y los diámetros de la circunferencia del inciso anterior y que aparecen en la imagen.
4. Si tomamos ahora como centro a $D(9, 5)$ y por radio $r_2 = 8$ ¿qué circunferencia obtenemos? ¿Cuál es su ecuación? ¿Pasa por $A$? ¿Cuáles son sus radios? ¿Está presente en la imagen alguna cuerda de esta circunferencia?
5. ¿Cuál es la medida del arco $DE$, en sentido contrario a las manecillas del reloj? En este mismo sentido ¿cuánto mide el sector delimitado por los radios $CB$ y $CE$?

# Ecuación general de la circunferencia

La ecuación general de segundo grado en dos variables $(x, y)$ es una expresión de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \ldots \qquad (1)$$

donde los coeficientes $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ y $F$ son números reales. Como puedes apreciar, tiene una parte **cuadrática** $(Ax^2 + Bxy + Cy^2)$ y una parte **lineal** $(Dx + Ey + F)$. Uno de los resultados que iremos construyendo a lo largo del libro, consiste en reconocer el tipo de lugar geométrico que representa una ecuación de este tipo: ¿es una línea recta o una circunferencia? ¿Podría representar una elipse o una parábola o una hipérbola? De este modo, si partimos de la ecuación **canónica** de la circunferencia:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

desarrollando cada uno de los binomios que aparecen en el lado izquierdo de la ecuación obtendremos la expresión:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0, \quad \ldots \qquad (2)$$

Esta se conoce como ecuación general *de la circunferencia* con centro en $(x_0, y_0)$ y radio $r \geq 0$. En el presente apartado veremos cómo pasar de un tipo de expresión a la otra y reconocer, a partir de una ecuación general de segundo grado en dos variables, si se trata de una circunferencia o no. Para empezar, ¿puedes identificar las semejanzas y las diferencias entre las expresiones (1) y (2)?

Observemos inmediatamente que, de acuerdo con la ecuación (1), los coeficientes son $A = C = 1, B = 0, D = -2x_0, E = -2y_0, F = x_0^2 + y_0^2 - r^2$. Veremos en los ejemplos siguientes cómo interpretar estas ecuaciones.

### Ejemplo

¿Representa la ecuación general de segundo grado:

$$4x^2 + 4y^2 - 4x + 6y - ¾ = 0, \quad \ldots. \qquad (3)$$

una circunferencia? En caso afirmativo ¿cuáles son su centro y su radio? En caso contrario ¿qué es lo que falla?

Para abordar este problema, debemos tratar de completar los cuadrados para la parte en $x$ y para la parte en $y$ en (3) como sigue:

$$4x^2 - 4x = (2x)^2 - 2(2x) + 1 - 1 = (2x - 1)^2 - 1.$$

$$4y^2 + 6y = (2y)^2 + 2(2y)(3/2) + (3/2)^2 - (3/2)^2 = (2y + 3/2)^2 - 9/4.$$

**Hacia Planea**

1. La pendiende del segmento que une a los puntos (1, 1) y (2, 3) es:
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
2. La distancia del punto medio a cualquier extremo del semgento compuesto por (1, 1) y (5, 4) es:
   a. 2.5
   b. 3.5
   c. 5
   d. 7
3. El ángulo de inclinación 36.87° corresponde aproximadamente a la pendiente:
   a. 3/4
   b. 1/2
   c. 2/3
   d. 4/5

De esta manera, si tenemos las operaciones anteriores en cuenta, podemos reescribir (3) como:

$$(2x - 1)^2 + (2y + 3/2)^2 - 4 = 0. \quad \ldots \quad (4)$$

Sin embargo, (4) todavía no es la ecuación canónica de una circunferencia: el coeficiente de las variables $x$, $y$ **no** es 1. Debemos factorizar el 2 que aparece en cada uno de los cuadrados:

$$(2(x - ½))^2 + (2(y + ¾))^2 - 4 = 0.$$

De modo que, tomando en cuenta que toda la expresión anterior está multiplicada por $2^2 = 4$, obtenemos $(x - ½)^2 + (y + ¾)^2 = 1$. Esta es la ecuación canónica de la circunferencia con centro en $(½, -¾)$ y radio 1: Es lo mismo que representa la ecuación (3) anterior.

### Actividad

**Di si las siguientes ecuaciones cuadráticas representan una circunferencia o no. En caso afirmativo, di cuáles son su centro y su radio. En caso contrario, di qué falla.**

1. $36x^2 + 36y^2 + 24x - 36y - 311 = 0$
2. $x^2 + 4y^2 - 2x + 4y = 0$
3. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 4y - 11 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 2x = 0$
5. $8x^2 + 8y^2 + 4x - 8y + 5 = 0$
6. $x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$
7. $8x^2 + 8y^2 - 12x + 4y + 5 = 0$
8. $x^2 - 12x + 4y + 36 = 0$

## Puntos y segmentos destacados en la parábola

En el capítulo anterior vimos cómo definir geométricamente la parábola: esta curva es la que describe un punto ($B$) que, en todo momento, está a la misma distancia de una recta fija $d$ (llamada **directriz**) y de un punto fijo $F$ (conocido como **foco**).

Sin embargo, cualquier parábola posee otros puntos y segmentos notables que nos ayudan a comprender mejor por qué su trazo tiene esta forma y cuál es la expresión algebraica que la representa. Por ejemplo, a la perpendicular a la directriz que pasa por el foco se le conoce como **eje focal (*e*)**, al punto de intersección de éste con la parábola se le llama **vértice (*V*)**. Finalmente, el segmento perpendicular al eje focal que pasa por el foco y cuyos extremos se encuentran sobre la curva es el **lado recto**.

A continuación, queremos obtener la ecuación canónica de la parábola; sin embargo, para no naufragar en un océano de cálculos algebraicos, lo haremos para la situación particular en que la directriz es paralela a uno de los ejes coordenados: supóngase, en este caso, que $d$ es **paralela** al eje Y. Por lo tanto su ecuación es $x = k_0$ (constante).

De este modo, si el foco es $F = (x_0, y_0)$ y $B = (x, y)$ es un punto arbitrario sobre la parábola, la distancia entre $B$ y $d$ estará dada por la abscisa de B menos el valor de $x$ por el que pasa la directriz:

$$\text{dist}(B, d) = |\, x - k_0 \,|.$$

Por otro lado, $\text{dist}(B, F) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ . Igualando ambas expresiones, elevándolas al cuadrado (para deshacernos de la raíz cuadrada) y simplificando, se obtendrá:

$$(y - y_0)^2 = 2(x_0 - k_0)x + k_0^{\,2} - x_0^{\,2} \quad \ldots \qquad (5)$$

Esta ecuación representa a la parábola con foco $F = (x_0, y_0)$ y directriz $x = k_0$. Como se aprecia en ella, las coordenadas de $F$ y la abscisa por la que pasa la directriz aparecen en los coeficientes de la ecuación; sin embargo para afirmar, por ejemplo, si la parábola abre hacia la derecha o hacia la izquierda, debemos conocer la posición del foco con respecto a la directriz.

Como $d$ es paralela al eje Y, el eje focal será paralelo al eje X y, dado que contiene al foco, su ecuación será $y = y_0$. Asimismo, dado que el vértice $V$ es el único punto de intersección entre la parábola y el eje focal, para conocer su abscisa (su ordenada es la misma que define al eje focal) bastará con sustituir $y = y_0$ en (5) y despejar $x$:

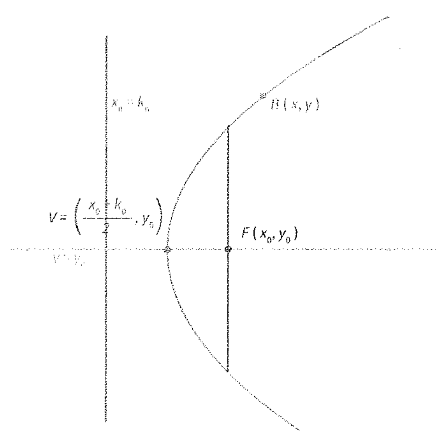
$$x = (x_0^{\,2} - k_0^{\,2})/2(x_0 - k_0) = (x_0 + k_0)/2,$$

es decir, $V = ((x_0 + k_0)/2, y_0)$. Si obtenemos la distancia entre $V$ y $F$ (la cual se conoce como **distancia focal** y se denota por $p$) obtendremos que $p = (x_0 - k_0)/2$. Esto también muestra que, como esperábamos, el vértice $V$ está en medio del foco ($F$) y la directriz ($d$).

Lo último que verificaremos es que la longitud del lado recto es igual a $4p$. Para esto necesitamos saber cuáles son los puntos sobre la parábola que lo delimitan: como están justamente por arriba del foco, basta con insertar su abscisa $x_0$ en (5) y encontrar las ordenadas de los puntos buscados:

$$y = y_0 + (x_0 - k_0),\ y = y_0 - (x_0 - k_0).$$

Como afirmamos, la distancia entre estos puntos (que tienen la misma abscisa) es $2(x_0 - k_0) = 4p$. Sin embargo, este último hecho es verdadero para todas las parábolas: el lado recto mide 4 veces la distancia focal.




## Actividad de aprendizaje 7

**Contesta lo que se te pide en cada caso con base en lo visto en esta sección.**

1. Escribe la ecuación de la parábola cuando $d$ es paralela al eje X (por lo tanto su ecuación será $y = k_0$) y el foco es $F = (x_1, y_1)$.

______________________________________________

______________________________________________

2. En el texto se mencionó que, cuando la directriz es paralela al eje Y, para saber si la parábola abre hacia la derecha o a la izquierda "debemos conocer la posición del foco con respecto a la directriz", es decir, si $x_0 < k_0$ o bien $x_0 > k_0$. ¿Cómo se reflejará este hecho en la ecuación (5) de la parábola? ¿Hacia dónde abre la parábola en cada caso?

3. Haciendo uso de los dos incisos anteriores, formula un criterio para saber cuándo la parábola abre hacia arriba o hacia abajo cuando la directriz es paralela al eje X.

4. Da la ecuación de la parábola y escribe cuánto mide el lado recto correspondiente en cada caso:

   La directriz es $x = 0$ y $F = (3, 0)$.

   La directriz es $x = -1$ y $V = (1, 2)$.

   $V = (4, -1)$ y $F = (2, -1)$.

   La directriz es $y = -2$ y $F = (-1, 1)$.

## Actividad de aprendizaje 8

Productos esperados

**En una hoja (o más) de papel milimétrico registra todas tus respuestas a la siguiente actividad. Después guárdala en tu portafolio de evidencias.**

Para esta actividad necesitarás una tabla, papel periódico, cinta adhesiva, tres canicas y pintura de agua o tinta china de colores. Tendrás que fijar con cinta adhesiva el papel periódico debajo de la tabla y elevar ésta para formar una rampa, colocando libros o tabiques en la parte de atrás para sostenerla en posición. Trata de no inclinarla demasiado para que las canicas al rodar cuesta abajo no tomen mucha velocidad.

Fija tus hojas de papel milimétrico sobre la tabla usando la cinta adhesiva. Vierte un poco de pintura o de tinta en una de las tapas de los recipientes y asegúrate que cada una de las canicas quede completamente cubierta. Arrójala en diagonal y cuesta arriba sin volver a tocarla hasta que salga del papel milimétrico. Puedes tirar las tres canicas sobre la misma hoja o utilizar una hoja para cada tiro.

¿Puedes identificar de qué curva se trata? ¿Es una recta? ¿O una circunferencia? ¿Una elipse o una parábola o una hipérbola? Si retiramos los objetos que inclinan la tabla y repetimos la experiencia ¿qué curva obtendríamos? ¿En qué se asemejan y en qué se diferencian las trayectorias descritas por las canicas en los dos experimentos?

# Ecuación general de la parábola

Dado que en este libro únicamente nos interesarán las parábolas cuya directriz es paralela a alguno de los ejes coordenados, la ecuación canónica de dichas curvas sólo puede tomar una de las dos siguientes formas:

$$(y - y_0)^2 = 2(x_0 - k_0)x + k_0^2 - x_0^2, \text{ si la directriz es } x = k_0;$$

$$(x - x_0)^2 = 2(y_0 - k_1)y + k_1^2 - y_0^2, \text{ si la directriz es } y = k_1.$$

Si desarrollamos cada una de estas ecuaciones e igualamos respectivamente las expresiones con cero obtendremos:

$$y^2 - 2(x_0 - k_0)x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - k_0^2 = 0,$$

$$x^2 - 2x_0x - 2(y_0 - k_1)y + x_0^2 + y_0^2 - k_1^2 = 0.$$

Cada una de estas expresiones se conoce como la ecuación general de la parábola para el caso en que la directriz es $x = k_0$ (o bien $y = k_1$). Naturalmente, si la directriz fuera una recta que no es paralela a ninguno de los ejes coordenados su ecuación sería más compleja.

Si comparamos la primera de estas expresiones con la ecuación general de segundo grado en dos variables ($Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$) veremos que $A = B = 0$, $C = 1$, $D = -2(x_0 - k_0)$, $E = -2y_0$, $F = x_0^2 + y_0^2 - k_0^2$. Lo anterior nos permite observar varias cosas:

1. Sólo está presente uno de los términos cuadráticos.
2. El valor absoluto del coeficiente de $x$ es la medida del lado recto.
3. Como todos los términos están del mismo lado de la igualdad, $-D$ nos indica el lado hacia el que abre la parábola: Si $-D < 0$ entonces la parábola abre hacia la izquierda; mientras que, si $-D > 0$, entonces la parábola abre hacia la derecha.
4. $-E/2$ es la ordenada del foco.

Las afirmaciones análogas para la segunda ecuación son igualmente válidas para el caso de las parábolas cuya directriz es paralela al eje X.

A diferencia de lo que hicimos en la página 69 con la ecuación general de la circunferencia, la estrategia en el caso de la parábola es mucho más sencilla: basta con completar el trinomio cuadrado perfecto de la variable que sí aparece elevada al cuadrado y llevar los términos restantes al otro lado de la igualdad (teniendo cuidado con los signos).

### Ejemplo

¿Representa la ecuación $x^2 + 2x - 6y - 2 = 0$ una parábola? En caso afirmativo ¿cuáles son su foco y su directriz? ¿Hacia dónde abre la curva? Determinémoslo.

Como sólo aparece uno de los términos cuadráticos tenemos motivos para sospechar que se trata, en efecto, de una parábola. Por lo tanto, procedemos algebraicamente. Para completar $x^2 + 2x$ a un cuadrado perfecto debemos sumar 1 de ambos lados de la igualdad:

$$x^2 + 2x + 1 - 6y - 2 = 1,$$

de aquí se tiene que los tres primeros sumandos son un trinomio cuadrado perfecto. Por lo tanto, podemos escribir $(x + 1)^2 = 6y + 3$. En consecuencia $x_0 = -1$, mientras que $y_0 - k_1 = 3$, $k_1^2 - y_0^2 = 3$. De la primera de estas expresiones inferimos que $y_0 > k_1$, por lo que la parábola abre hacia arriba.

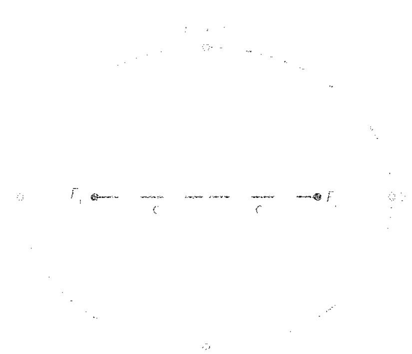
Para saber cuál es la ordenada del foco y la ecuación de la directriz escribimos (por la primera de las expresiones anteriores) $y_0 = 3 + k_1$. Elevando al cuadrado y sustituyendo en la otra ecuación obtenemos que $k_1 = -2$; de modo que el foco es $F = (-1, 1)$.

### Actividad

**Di si las siguientes ecuaciones cuadráticas representan una parábola o no. En caso afirmativo, di cuáles son su foco y su directriz. En caso contrario, di qué falla.**

1. $y^2 - 8x - 2y - 7 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$
3. $x^2 - xy + 4y^2 - 4 = 0$
4. $x^2 + 2x + 8y - 23 = 0$

## Puntos y segmentos destacados en la elipse



La elipse fue definida geométricamente como la curva descrita por un punto $B = (x, y)$ tal que la suma de las distancias a dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ (llamados focos) es una constante que denotaremos por $2a > 0$. Si trazamos una recta que una a los focos encontraremos dos **vértices** ($V_1$ y $V_2$) y al segmento comprendido entre ellos lo llamaremos **eje mayor** o **eje focal**.

El punto medio ($C$) del eje mayor se conoce como **centro**. Por esta razón la elipse, a diferencia de la parábola, se califica (junto con la circunferencia y, como veremos más adelante, la hipérbola) como una cónica "central".

Al segmento perpendicular al eje mayor y que pasa por el centro se le conoce como **eje menor**. Como puede apreciarse, los ejes de la elipse también son ejes *de simetría* de la misma.

Comenzaremos nuestra exploración analítica de la elipse mostrando que la longitud del eje mayor es precisamente $2a$: la constante que aparece en la definición misma de la curva.

Para ver esto observa que la suma de las distancias de $V_1$ a $F_1$ y a $F_2$ es precisamente $2a$. En esta suma, $\text{dist}(V_1, F_1)$ se ha contado dos veces:

$$2a = \text{dist}(V_1, F_1) + \text{dist}(V_1, F_2) = \text{dist}(V_1, F_1) + \text{dist}(V_1, F_1) + \text{dist}(F_1, F_2).$$

Exactamente lo mismo podemos decir de $V_2$: $2a = 2\text{dist}(F_2, V_2) + \text{dist}(F_1, F_2)$. De modo que igualando estas expresiones entre sí, obtenemos que $\text{dist}(V_1, F_1) = \text{dist}(V_2, F_2)$. Si sustituimos esto en cualquiera de las igualdades anteriores se observa que $2a = \text{dist}(V_1, F_1) + \text{dist}(V_2, F_2) + \text{dist}(F_1, F_2) = \text{dist}(V_1, V_2)$, como se afirmaba.

Si denotamos ahora por $2b$ a la longitud del eje menor y por $2c$ a la distancia entre los focos, el teorema de Pitágoras nos permite concluir que $a^2 = b^2 + c^2$, es decir, si conocemos la constante que define a la elipse y uno de los datos, ya sea la longitud del eje menor o la distancia entre los focos, automáticamente conocemos el dato faltante. En este curso únicamente nos interesarán aquellas elipses cuyo eje mayor es paralelo al eje de las abscisas o bien al eje de las ordenadas. En el primer caso a la elipse se le llamará **horizontal** y en el segundo caso, **vertical**.

Al cociente de la distancia del centro a cualquiera de los focos entre la distancia del centro a cualquiera de los vértices lo denotaremos por la letra $e$ y lo llamaremos la **excentricidad** de la elipse. La excentricidad mide qué tanto se desvía la elipse de ser una circunferencia (¿qué ocurre cuando $c = 0$?) y qué tan "aplanada" puede ser (¿puede suceder que $a = c$?) Este es un número real $e = c/a$ que satisface $0 \leq e \leq 1$.

A continuación encontraremos la ecuación de una elipse horizontal con centro en el origen, focos $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ y constante $2a$. Por definición tendremos:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\,.$$

Lo cual puede reescribirse como $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ . Si elevamos ambos lados al cuadrado y reducimos los términos semejantes de modo que la raíz restante quede sola de algún lado de la igualdad, entonces podremos escribir:

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,.$$

Elevando una vez más al cuadrado ambos lados de la igualdad, desarrollando todos los binomios al cuadrado resultantes y reduciendo términos semejantes tendremos:

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2, \text{ o de modo equivalente, } a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2,$$

donde hemos usado la relación entre los ejes y la distancia entre los focos, $a^2 + b^2 = c^2$. Dividiendo esta última expresión entre $a^2b^2$, obtenemos la ecuación canónica de la ecuación de la elipse con centro en el origen y focos en $(\pm c, 0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Cuando $y = 0$ se tiene que $x = \pm a$, de modo que los vértices tienen coordenadas $V_1 = (-a, 0)$, $V_2 = (a, 0)$ lo cual muestra, una vez más, que la longitud del eje mayor es precisamente $2a$.

Un razonamiento análogo nos permite establecer que la elipse vertical, con centro en el origen, focos en $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$ y constante $2a$, tiene ecuación canónica:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\,.$$

### Actividad

**Realiza en tu cuaderno lo que se te pide en cada caso con base en lo visto en esta sección.**

1. Si en vez de colocar el centro de la elipse horizontal en $C = (0, 0)$ lo pensamos ubicado en otro punto cualquiera $C = (x_0, y_0)$ entonces los focos se ubicarán en $F_1 = (x_0 - c, y_0)$, $F_2 = (x_0 + c, y_0)$. Repite todo el argumento y las cuentas anteriores para convencerte de que, en este caso, la ecuación canónica que la representa es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\,.$$

2. Si en vez de colocar el centro de la elipse vertical en $C = (0, 0)$ lo pensamos ubicado en otro punto cualquiera $C = (x_0, y_0)$ entonces los focos se ubicarán en $F_1 = (x_0, y_0 + c)$, $F_2 = (x_0, y_0 - c)$. Repite la argumentación y las cuentas anteriores para convencerte de que, en este caso, la ecuación canónica que la representa es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1.$$

3. ¿Cuál es la ecuación de la elipse con centro en el origen, que tiene uno de sus vértices en $V = (5, 0)$ y uno de sus focos en $F = (-4, 0)$? ¿Cuál es su excentricidad?

Responde verdadero o falso a las siguientes afirmaciones:

La constante $2a$ puede ser estrictamente menor que la distancia entre los focos $2c$.

Si $a = c$, entonces la elipse es el segmento de recta que une los focos.

## Ecuación general de la elipse

Llevaremos a cabo el procedimiento algebraico de las secciones anteriores donde desarrollamos la ecuación canónica de la curva en cuestión y la comparamos con la ecuación general de segundo grado en dos variables. Para esto considérese la ecuación canónica de la elipse horizontal con centro en $C = (x_0, y_0)$, focos en $F_1 = (x_0 - c, y_0)$, $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ y constante $2a$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\,.$$

Si multiplicamos ambos lados de la igualdad por $a^2b^2$, simplificamos y desarrollamos los binomios al cuadrado que aparecen en la misma, obtendremos:

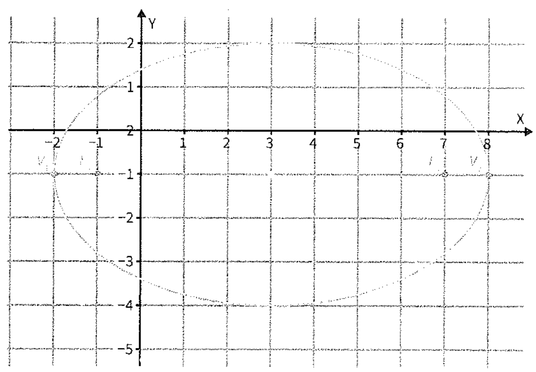
$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^{\,2} + a^2y_0^{\,2} - a^2b^2 = 0.$$

Deseamos efectuar ahora nuestra consabida comparación con $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; sin embargo antes de iniciar debemos observar algo: los coeficientes $A$, $C$ tienen el mismo signo (ambos son positivos), pero distintos entre sí y también distintos de cero. El mayor de estos coeficientes nos dirá si la elipse es horizontal o vertical (las únicas que nos interesarán aquí). Si $C > A$ entonces la elipse es horizontal y los coeficientes satisfacen las relaciones siguientes $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$, $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$. En caso contrario ($C < A$) será vertical y $A = a^2$, $B = 0$, $C = b^2$, $D = -2a^2x_0$, $E = -2b^2y_0$, $F = a^2x_0^2 + b^2y_0^2 - a^2b^2$.

1. El caso $A = C$, implicaría que $b = a$, de modo que $c = 0$ y la curva representada tendría que ser una circunferencia de radio $a > 0$ y centro en $(x_0, y_0)$.
2. $B = 0$; sin embargo, en general, esto no es cierto para elipses rotadas (aquellas que no son horizontales ni verticales). La ecuación de este tipo de elipses es una ecuación general de segundo grado.
3. Podemos conocer el semieje mayor, a, el semieje menor, $b$, la excentricidad y las coordenadas del centro de la elipse, $C = (x_0, y_0)$, de los focos y de los vértices sin llevar la ecuación general de la elipse a su forma canónica: toda la información puede obtenerse a partir de los coeficientes.

### Ejemplo

¿Representa la ecuación $9x^2 + 25y^2 - 54x + 50y - 119 = 0$ una elipse? En caso afirmativo, ¿cuál es su centro y cuáles son las longitudes de ambos ejes? ¿Dónde están sus focos y sus vértices? ¿Cuál es su excentricidad?




Dado que los términos cuadráticos son distintos y ambos son positivos, la ecuación anterior es efectivamente una elipse. Como 25 > 9, se trata de una elipse horizontal y, en este caso, tenemos las relaciones: $A = b^2 = 9$, $C = a^2 = 25$, $D = -2b^2x_0 = -54$, $E = -2a^2y_0 = 50$, $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = -119$. Resolviendo estas ecuaciones con $a$, $b$, $x_0$, $y_0$ como incógnitas, descubriremos que $a = 5$, $b = 3$, $x_0 = 3$, $y_0 = -1$. De lo anterior podemos obtener $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$, de modo que la excentricidad es 4/5. El centro está en $C = (3, -1)$ y el eje mayor mide 10 y el eje menor mide 6.

Dado que la elipse es horizontal y $c = 4$, los focos tienen coordenadas (7, –1) y (–1, –1). Dado que $a = 5$, los vértices están en (8, –1) y (–2, –1).

## Actividad de aprendizaje

**Realiza los que se te pide**

1. Da la ecuación canónica de la elipse del ejemplo anterior. ______________________________
2. Di si las siguientes ecuaciones cuadráticas representan o no una elipse. En caso afirmativo, di si es horizontal o vertical, cuáles son su centro, sus focos y su excentricidad. En caso contrario, di qué falla.

   a. $4x^2 - 24y^2 - 6x + 96y - 8 = 0$. ______________________________________________

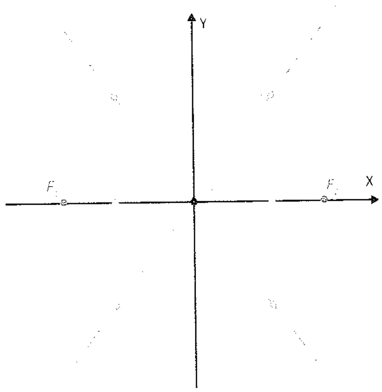
$49x^2 + 36y^2 + 98x - 1715 = 0.$ ___________________________________________

$9x^2 - 6x + y - 8 = 0.$ __________________________________________________

$x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 12 = 0.$ ___________________________________________

3. Haz en tu cuaderno un esbozo de las elipses que encontraste en el ejemplo anterior, indicando cuál es el eje mayor, cuál el eje menor y los vértices de la elipse.

## Puntos y segmentos destacados en la hipérbola




La hipérbola fue definida geométricamente como el conjuntos de puntos $B = (x, y)$ tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ (llamados focos) es constante (que denotaremos, análogamente al caso de la elipse, por $2a > 0$). Es decir, $B$ estará sobre la curva si $|\text{dist}(B, F_1) - \text{dist}(B, F_2)| = 2a$.

A la línea recta determinada por los focos la llamaremos **eje transverso** (o **eje focal**) y, como recordarás del parcial anterior, a las intersecciones de éste con la curva las llamamos **vértices**.

Al igual que la elipse, la hipérbola con focos en $F_1$ y $F_2$ y constante $2a$ es una curva que tiene **centro** (el punto medio del segmento que une los vértices). Sin embargo, a diferencia de la elipse, no podemos hablar de un eje "menor", por lo que nos referiremos a la recta perpendicular al eje transverso que pasa por el centro como **eje conjugado** de la hipérbola.

Otra diferencia con la elipse que hay que subrayar en el caso de la hipérbola es que ésta está formada por dos curvas a las que se les llama **ramas** de la hipérbola.

En este texto sólo nos interesarán las hipérbolas horizontales (aquellas cuyo eje transverso es paralelo al eje X) o verticales (aquellas cuyo eje transverso es paralelo al eje Y). Dado que ya sabemos de nuestra construcción geométrica de la hipérbola que $\text{dist}(F_1, V_1) = \text{dist}(F_2, V_2)$ y que $\text{dist}(V_1, V_2) = 2a$, para una hipérbola con centro en el origen, los vértices tendrán coordenadas $(\pm a, 0)$.

Si escribimos en este caso $(\pm c, 0)$ para los focos, la definición geométrica de la hipérbola equivaldrá (por la presencia del valor absoluto) a las dos ecuaciones:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = -2a$$

Del mismo modo que lo hicimos para la elipse, podemos reescribir estas ecuaciones como $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + 2a$, $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} - 2a$, respectivamente. Elevando al cuadrado ambas expresiones, desarrollando los cuadrados y simplificando los términos semejantes llegaremos a la expresión siguiente:

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ .$$

Si elevamos nuevamente al cuadrado ambos lados de la igualdad el signo es redundante y obtenemos la expresión: $16c^2x^2 + 16a^4 = 16a^2x^2 + 16a^2c^2 + 16a^2y^2$.

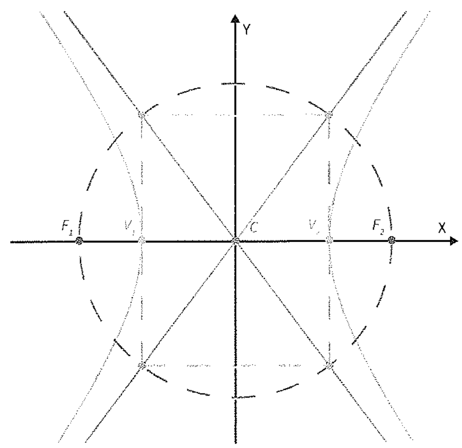
Si cancelamos de ambos lados el 16, llevando todos los términos con incógnitas al lado izquierdo de la igualdad y los términos constantes al lado derecho de la misma, obtendremos:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Esta expresión está muy cerca de lo que queremos llamar la ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen, focos en $(\pm c, 0)$ y constante $2a$. Dado que por construcción se tiene que $c > a$, la diferencia $c^2 - a^2 > 0$. De modo que, si definimos $b^2 = c^2 - a^2$, entonces podremos escribir la ecuación anterior como:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si trazamos la circunferencia con radio $c > 0$ y centro en el origen, por el teorema de Pitágoras y nuestra definición de $b^2$, vemos que el segmento perpendicular al eje transverso que se levanta desde el vértice define una cuerda que mide exactamente $2b$.




En consecuencia, las rectas que pasan por el centro de la hipérbola (en este caso el origen) y que aparecen como diagonales del cuadrilátero inscrito en la circunferencia anterior tienen ecuaciones:

$$y = \pm(b/a)\,x.$$

A estas rectas se les conoce como **asíntotas** de la hipérbola: conforme el valor de $x$ aumenta (en la rama derecha) o decrece (en la rama izquierda) sin cota, la rama correspondiente se pega a las asíntotas sin tocarlas. Para ver esto despéjese $y$ en la ecuación de la hipérbola: $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ y factorícese $x^2/a^2$ de la raíz cuadrada:

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\,.$$

Conforme $x$ toma valores cada vez mayores (si estamos en la rama derecha, por ejemplo), el cociente $a^2/x^2$ se hace cada vez menor y la expresión $1 - a^2/x^2$ se acerca cada vez más a 1. Si continuamos indefinidamente este proceso (no debe olvidarse que estamos trabajando con la expresión de la hipérbola) la ecuación se parece cada vez más a $y = \pm(b/a)x$, que son precisamente las ecuaciones de las asíntotas.

## Actividad de aprendizaje 12

**Realiza en tu cuaderno lo que se te pide en cada caso con base en lo visto en esta sección.**

1. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, que tiene uno de sus focos en $F = (5, 0)$ y uno de sus vértices en $V = (-4, 0)$? ¿Cuáles son sus asíntotas?

2. Repite el argumento de esta sección para convencerte que la ecuación de la hipérbola vertical con centro en el origen, focos en $(0, \pm c)$ y constante $2a > 0$ es $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. ¿Cuáles son las ecuaciones de sus asíntotas? Compara de manera respetuosa y cortés tu razonamiento y el de tus compañeros.
3. Razonando de manera análoga a lo que hicimos para el caso de la elipse, establece que la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en un punto arbitrario del plano y distinto al origen, $C = (x_0, y_0)$, focos en $(x_0 \pm c, y_0)$ y constante $2a > 0$ es $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas en este caso? Compara de manera respetuosa y cortés tu razonamiento y el de tus compañeros.
4. Razonando de manera análoga a lo que hicimos para el caso de la elipse, establece que la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en un punto arbitrario del plano y distinto al origen, $C = (x_0, y_0)$, focos en $(x_0, y_0 \pm c)$ y constante $2a > 0$ es $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas en este caso? Compara de manera respetuosa y cortés tu razonamiento y el de tus compañeros.

## Ecuación general de la hipérbola

Retomaremos nuevamente el procedimiento algebraico de las secciones anteriores donde desarrollamos la ecuación canónica de la curva en cuestión y terminamos comparándola con la ecuación general de segundo grado en dos variables. Para esto, consideraremos la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en $C = (x_0, y_0)$, focos en $(x_0 \pm c, y_0)$ y constante $2a > 0$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $a^2b^2$, desarrollando ambos binomios al cuadrado, distribuyendo y escribiendo los términos en orden obtendremos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Nuevamente observamos varias cosas que nos ayudarán a caracterizar si una ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se trata de una hipérbola (horizontal) o no. Analicemos más de cerca las relaciones entre los coeficientes $A = b^2$, $B = 0$, $C = -a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = 2a^2y_0$, $F = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Los coeficientes de la parte cuadrática, $A$ y $C$, son ambos distintos de cero (no necesariamente distintos entre sí) y tienen signos contrarios.

El coeficiente del término mixto $B = 0$. Esto no es cierto para hipérbolas en general que aparecen rotadas. El ejemplo más sencillo es la hipérbola cuya ecuación es $xy = 1$.

El término cuadrático con el signo negativo (en este caso $-a^2y^2$) nos indica que la hipérbola es horizontal. En el caso de una hipérbola vertical tendríamos $-a^2x^2$; de modo que el signo nos ayuda a saber en estos casos si la hipérbola es horizontal o vertical.

En el caso de una hipérbola vertical tendremos $A = -a^2$, $B = 0$, $C = b^2$, $D = 2a^2x_0$, $E = -2b^2y_0$, $F = -a^2x_0^2 + b^2y_0^2 - a^2b^2$.

5. Al igual que con la elipse, podemos obtener toda la información de la hipérbola con sólo conocer los coeficientes y las relaciones anteriores, sin tener que llevar la ecuación a su forma canónica.

**Ejemplo**

La ecuación $-4x^2 + y^2 - 16x + 2y - 19 = 0$ ¿representa una hipérbola? En caso afirmativo, ¿es horizontal o vertical? ¿Cuáles son su centro, sus vértices y sus focos? A partir de tu respuesta a estas preguntas, escribe la ecuación canónica que representa a la misma hipérbola y da las ecuaciones de sus asíntotas.

Como indica el punto 3, primero debemos identificar si la hipérbola es horizontal o vertical y para ello debemos observar cuál término cuadrático es negativo. Al serlo $x^2$ podemos afirmar que la hipérbola es vertical y en consecuencia: $A = -a^2 = -4$, $B = 0$, $C = b^2 = 1$, $D = 2a^2x_0 = -16$, $E = -2b^2y_0 = 2$, $F = -a^2x_0^2 + b^2y_0^2 - a^2b^2 = -19$.

Debemos tomar $a$, $b$, $x_0$, $y_0$ como incógnitas e ir resolviendo las ecuaciones anteriores (sabiendo que, por ejemplo, $a$ y $b$ son mayores que cero). De este modo $a = 2$, $b = 1$, $x_0 = -2$, $y_0 = -1$. Por lo tanto $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$, el centro es $C = (-2, -1)$, los vértices están en $(-2, 1)$ y $(-2, -3)$ y los focos en $\left(-2,-1\pm\sqrt{5}\right)$. Finalmente la ecuación canónica es:

$$\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x+2)^2}{1}=1\,.$$

Las asíntotas, como ya vimos en la sección anterior, tienen ecuaciones $y + 1 = \pm 2(x + 2)$. Simplificando tendremos $y = 2x + 3$, $y = -2x - 5$.

## Actividad de aprendizaje 13

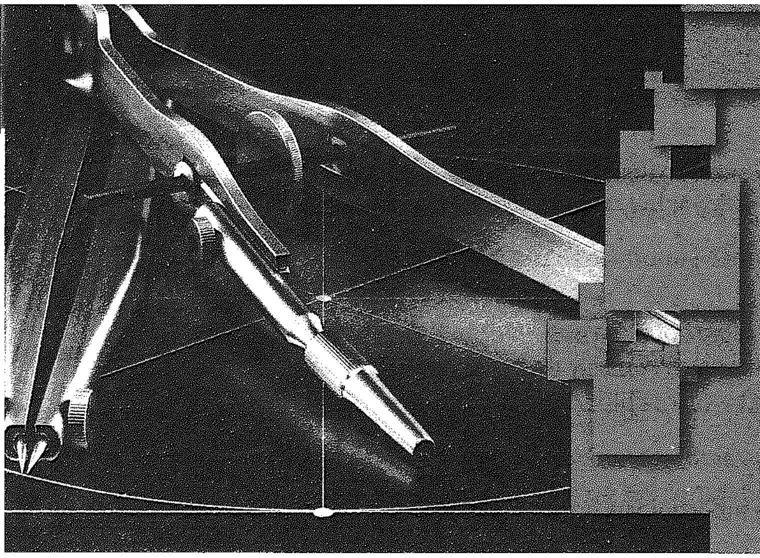
**Realiza lo que se te pide en cada caso con base en lo visto en esta sección.**

1. Estudia la ecuación $16x^2 - 9y^2 - 128x + 18y + 103 = 0$. Di si se trata de una hipérbola horizontal o vertical, cuáles son su centro, sus vértices, sus focos y sus asíntotas. Posteriormente da su ecuación canónica.
2. Estudia la ecuación $-25x^2 + 144y^2 - 864y - 2304 = 0$. Di si se trata de una hipérbola horizontal o vertical, cuáles son su centro, sus vértices, sus focos y sus asíntotas. Posteriormente da su ecuación canónica.

### Unidades métricas

La forma de medir distancias es un problema matemático que se ha resuelto desde distintas perspectivas y definiendo distintas métricas, nombre que reciben las funciones distancia asociadas a un conjunto que cumple ciertas características.

En la imagen puedes activar mediante la aplicación algunos ejemplos de métricas.



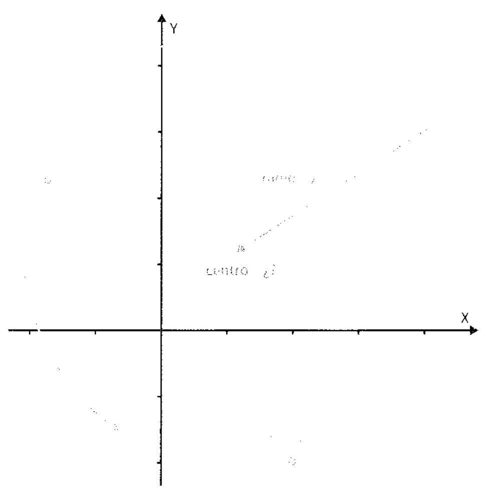
# ¿Cómo construir la ecuación de la circunferencia?

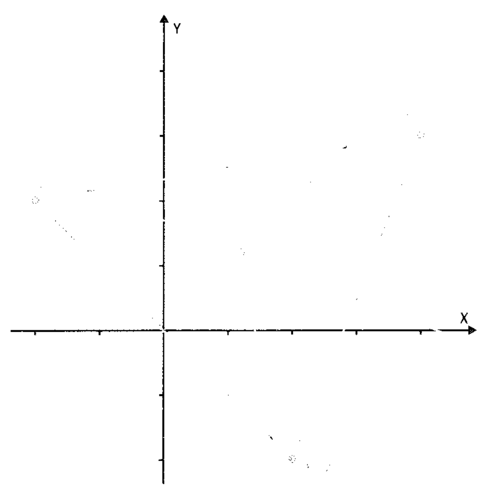
## Construcción de la ecuación de la circunferencia al conocer puntos o rectas que la intersequen

Así como para la recta necesitamos la pendiente y un punto, para la circunferencia también es indispensable conocer dos parámetros: el radio y el centro. El objetivo en este capítulo es aprender a encontrar estos parámetros en la información que se nos proporciona.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.

Si la información que tenemos son tres puntos de la circunferencia (izquierda) debemos aplicar el teorema de la geometría euclidiana que garantiza que para todo triángulo existe una circunferencia que contiene a sus vértices, y su centro es la intersección de sus **mediatrices** (derecha).



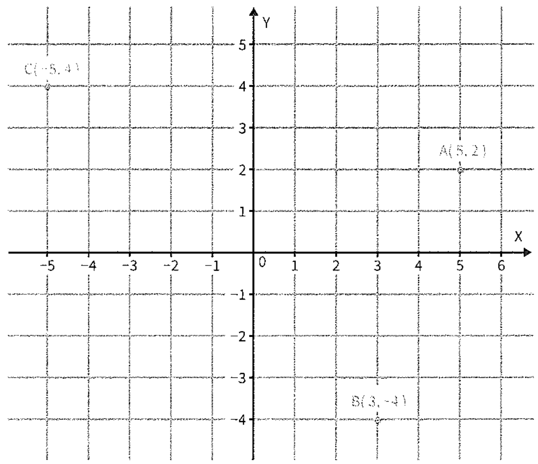




Una vez teniendo el centro, hallar el radio es equivalente a calcular la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos. Ustedes conocerán el camino a través de la actividad de aprendizaje.

## Actividad de aprendizaje 14

**Respondan las preguntas y sigan los pasos para hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(5, 2)$, $B(3, -4)$ y $C(-5, 4)$.**

1. Tracen en el plano cartesiano las rectas que pasan por $A$ y $B$, por $B$ y $C$ y por $A$ y $C$.




2. Calculen las pendientes de las tres rectas trazadas.

| | | |
|---|---|---|
| $m_{AB} =$ | $m_{BC} =$ | $m_{AC} =$ |

3. Hallen las ecuaciones de las rectas.

| Ecuación de la recta que pasa por $A$ y $B$ | Ecuación de la recta que pasa por $B$ y $C$ | Ecuación de la recta que pasa por $A$ y $C$ |
|---|---|---|
| | | |

4. Completen la tabla y grafiquen los puntos encontrados.

| Punto medio de $AB$ | Punto medio de $BC$ | Punto medio de $AC$ |
|---|---|---|
| | | |

5. Tracen las rectas perpendiculares que pasan por los puntos medios. Usen su escuadra.

6. Respondan: ¿Qué propiedad cumplen las pendientes de dos rectas perpendiculares? Si no lo recuerdan busquen en su libro.

_______________________________________________

7. Hallen las pendientes de las rectas perpendiculares a las rectas iniciales.

| Pendiente de la recta perpendicular a $AB$ | Pendiente de la recta perpendicular a $BC$ | Pendiente de la recta perpendicular a $AC$ |
|---|---|---|
| | | |

8. Hallen las ecuaciones de las rectas perpendiculares y completen la tabla.

| Ecuación de la recta perpendicular a la recta que pasa por *A* y *B*. | Ecuación de la recta perpendicular a la recta que pasa por *B* y *C*. | Ecuación de la recta perpendicular a la recta que pasa por *A* y *C*. |
|---|---|---|
| | | |

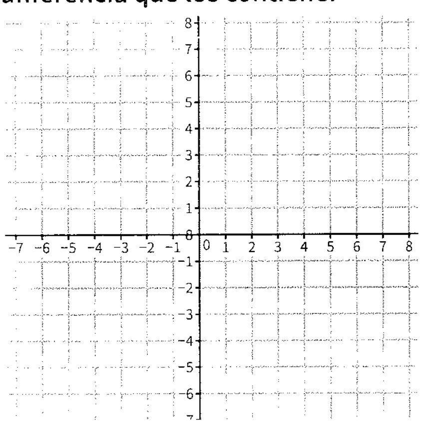
9. Elijan dos de ellas y resuelvan el sistema de ecuaciones que forman. ¿Qué obtienen al resolver el sistema de ecuaciones?

10. Calculen la distancia del punto que encontraron en la actividad anterior, píntenlo en el plano y llámenle *D*, a cualquiera de *A*, *B* o *C*.

11. Calculen la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos *A*, *B* y *C*.

12. Dibujen la circunferencia que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

**Marquen tres puntos no colineales en el siguiente plano cartesiano y repitan los pasos anteriores para hallar la ecuación de la circunferencia que los contiene.**



**Hallen las ecuaciones de las circunferencias que pasan por los puntos señalados.**

| *A* | *B* | *C* | Ecuación |
|---|---|---|---|
| (0, 2) | (2, 0) | (4, 2) | |
| (2, 5) | (3, −2) | (−4, −3) | |
| (−2, 4) | (−6, 2) | (−8, 6) | |
| (4, −2) | (9, −3) | (4, −8) | |
| (4, 4) | (−4, 4) | (−4, −4) | |
| (7, 7) | (2, 6) | (7, 1) | |

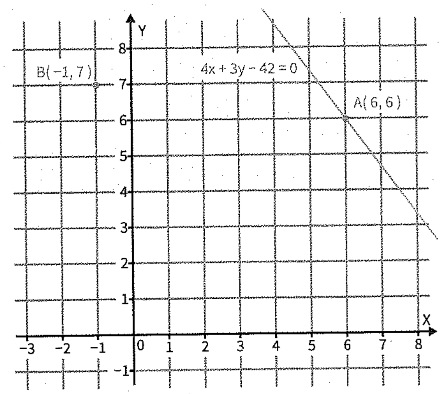
Otra situación que se puede presentar es conocer la ecuación de una tangente a la circunferencia, el punto de tangencia *A* y otro punto de la circunferencia *B*.

En este caso, el "truco" está en recordar que el radio que pasa por el punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente. Esto es necesario para encontrar la ecuación de la recta que contiene a dicho radio. Después, se procede de una manera parecida a cuando se tienen tres puntos, pues habrá que hallar la ecuación de la perpendicular a la recta que pasa por *A* y *B* y resolver el sistema de ecuaciones para hallar el centro.

Una vez que se conoce el centro, el radio se calcula con la distancia entre dos puntos: el centro y *A* o *B*, el que se prefiera. Practica el método con la siguiente actividad.

## Actividad de aprendizaje 15

**Sigan los pasos, respondan las preguntas y grafiquen lo que se pide para hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $4x + 3y - 42 = 0$ en el punto $A(6, 6)$ y pasa por el punto $B(-1, 7)$.**




1. ¿Cuál es la pendiente de cualquier recta perpendicular a $4x + 3y - 42 = 0$?

   ______________________

2. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular a $4x + 3y - 42 = 0$ y que pasa por $B(-1, 7)$?

   ______________________

3. En el plano cartesiano grafiquen la recta perpendicular a la recta $4x + 3y - 42 = 0$. Utilicen su escuadra.
4. Tracen en el plano anterior la recta que pasa por $A$ y $B$.
5. Hallen el punto medio del segmento $AB$ y grafíquenlo.

   ______________________

6. Hallen la ecuación de la mediatriz del segmento $AB$.

   ______________________

7. Resuelvan el sistema de ecuaciones formado por la recta perpendicular a $4x + 3y - 42 = 0$ y la ecuación de la mediatriz del segmento $AB$.

   ______________________

8. Hallen el radio de la circunferencia (tomen de referencia la solución anterior y el punto B).

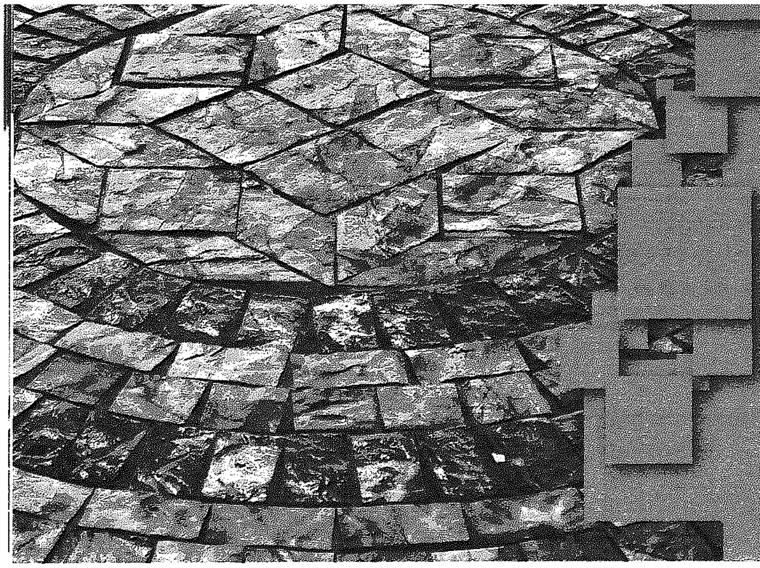
   ______________________

9. Calculen la ecuación de la circunferencia. Consideren que su radio es perpendicular a $4x + 3y = 42$.

   ______________________

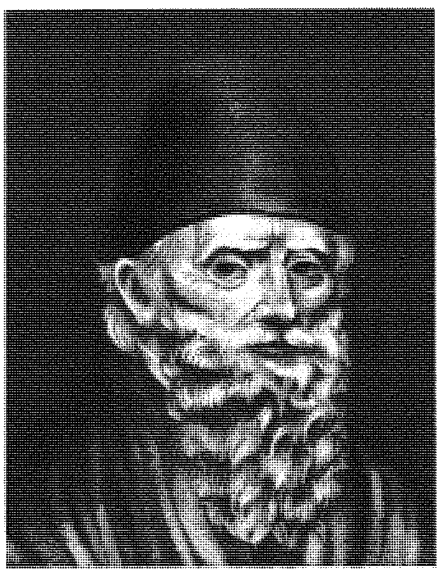
**Calculen la ecuación de cada circunferencia.**

| Punto de tangencia $A$ | $B$ | Recta tangente | Ecuación |
|---|---|---|---|
| (5, 6) | (0, 5) | $2x + 3y = 28$ | |
| (7, 6) | (10, 3) | $y = 6$ | |
| (−2, 3) | (−1, −2) | $-3x + 2y = 12$ | |
| (−4, 0) | (−3, −5) | $-3x + 2y = 12$ | |
| (−3, −4) | (−1, −6) | $3x + y + 13 = 0$ | |
| (−2, −5) | (3, −6) | $3x + 2y + 16 = 0$ | |
| (4, −3) | (1, −6) | $x = 4$ | |



# Elementos históricos sobre la elipse, la parábola y la hipérbola. Trazado y propiedades

## Historia de las cónicas



La historia de la elipse, la parábola y la hipérbola (a las que llamaremos **secciones cónicas** por razones que serán evidentes más adelante) es casi tan antigua como la geometría misma. Al igual que ésta, las primeras evidencias escritas de su desarrollo se remontan a la Antigua Grecia, en el s. III a. n. e.

Euclides (ca. 330 a. n. e. - ca. 265 a. n. e.), autor del primer tratado, titulado *Elementos*, donde se exponía de manera sistemática mucho del conocimiento geométrico de su época, escribió (junto con su contemporáneo, Aristeo) un libro llamado *Elementos de cónicas*. Sin embargo, lo único que se conserva de dicho tratado son apenas unas cuantas proposiciones que registró Arquímedes (ca. 287 a. n. e. - 212 a. n. e.) en las primeras páginas de su libro *Sobre la esfera y el cilindro*.

El primer escrito que se conserva casi en su totalidad se le debe al matemático griego Apolonio de Perga (ca. 262 a. n. e. - ca. 190 a. n. e.). Su obra, titulada *Cónicas*, constaba de 8 libros y ofrecía un estudio comprensivo de las curvas que aquí hemos llamado elipse, parábola e hipérbola, así como de muchas de sus propiedades. Estos nombres, dicho sea de paso, fueron introducidos por el propio Apolonio, y aluden a un problema geométrico de la antigüedad: la “aplicación de áreas” por defecto, por igualdad y por exceso, respectivamente.

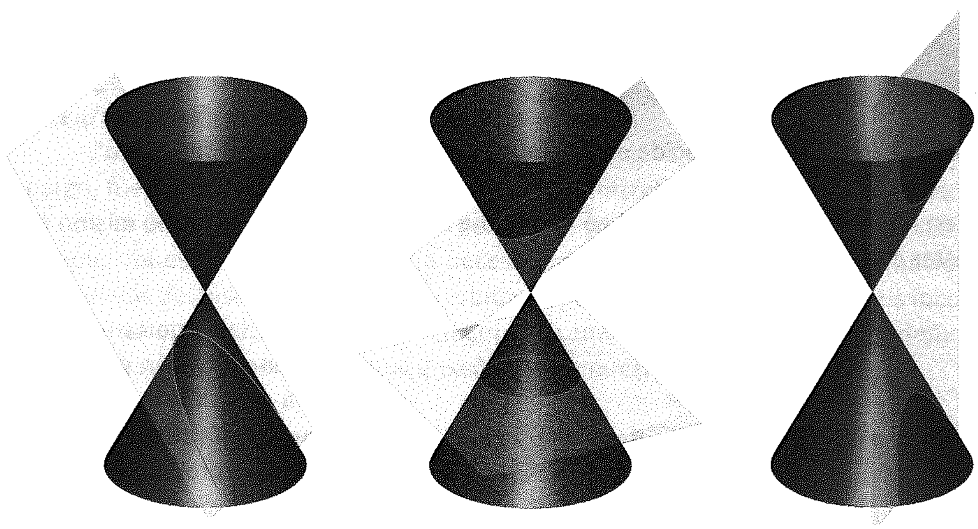
Para ver de qué trata esto con una notación y lenguaje modernos, supóngase que tenemos un segmento fijo de longitud $4p > 0$ al que llamaremos base. Ahora si nos dan un cuadrado fijo de lado $a > 0$, entonces el área de éste será $a^2$. El problema de aplicación de esta área por igualdad sobre la base consiste en averiguar qué longitud, $b > 0$, debe tener el lado de un rectángulo con base de longitud $4p$ para que $a^2 = 4p \cdot b$. Es decir, queremos que el área del cuadrado sea igual al área de un rectángulo cuya base ha sido dada.

Si ahora dejamos que el lado del cuadrado sea variable, por ejemplo $x$, así como el lado del rectángulo, por ejemplo $y$; pero mantenemos fija la longitud de la base (es decir, $4p > 0$), tendremos una relación funcional entre ambos datos: $x^2 = 4p$ y, lo cual representa una parábola cuyo lado recto mide $4p$.

Es importante subrayar que Apolonio carecía del lenguaje algebraico: todo lo que él escribió en sus cónicas lo hizo sin contar con un sistema de numeración posicional (como el que usamos actualmente) y representando todas las cantidades utilizadas mediante segmentos de recta.

Antes de seguir con nuestro recorrido histórico, debemos aclarar también dónde se originó el nombre de "cónicas" a estas curvas.

Esta denominación proviene de que tanto Aristeo como Euclides y Apolonio, al carecer de un lenguaje algebraico que les permitiera representar toda una curva mediante una ecuación, las consideraban como entes geométricos dados por la intersección de un plano y un cono. Sin embargo, estos autores llamaban "un cono" a lo que nosotros llamaríamos actualmente un par de conos que se tocan por el ápice (punta) y se extienden indefinidamente en ambos lados.



La imagen anterior muestra cómo puede obtenerse cada una de las cónicas de esta manera. Todo depende de la inclinación del plano que hace el corte con el sólido.

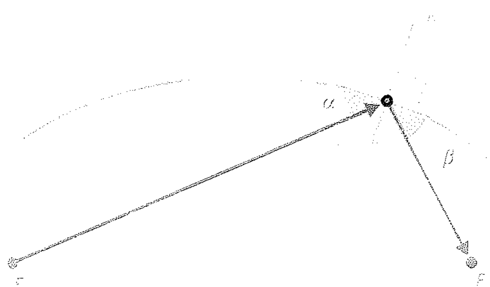
Para llegar al siguiente momento destacado en la historia de las cónicas debemos saltar hasta el s. XVII, a Francia. Esto no quiere decir que durante casi 20 siglos no hubiera avances importantes en el estudio y el desarrollo de su geometría o de su representación a través de ecuaciones algebraicas; por ejemplo, los matemáticos persas musulmanes Al-Juarismi (ca. 780 - ca. 850) y Omar Jayam (ca. 1048 - ca. 1131) fueron, respectivamente, el padre del álgebra y el primero en utilizar secciones cónicas para resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas.

Sin embargo, el primero que elaboró un método general para identificar una de las cónicas y una ecuación de segundo grado en dos variables fue René Descartes (1596 - 1650).

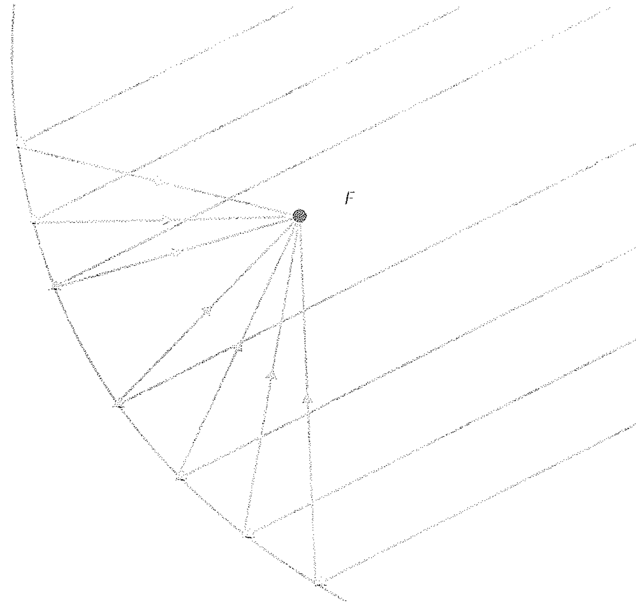
Descartes escribió los tres libros de la Geometría como apéndice a su obra filosófica más famosa, *El discurso del método* (1637). En aquella, Descartes introduce la noción de ejes coordenados y muestra cómo, dada cualquier curva en el plano, podemos asociarle una ecuación algebraica en dos variables $x$, $y$.

Es en el segundo libro de la Geometría donde Descartes demuestra que a toda cónica le corresponde una ecuación de segundo grado en dos variables y, recíprocamente, que a cualquier ecuación de este tipo podemos asociarle una de las secciones cónicas (circunferencias, elipses, parábolas, hipérbolas y otros casos que hoy llamamos "degenerados"). Al método ideado por Descartes para llevar a cabo esta correspondencia, él mismo lo bautizó análisis moderno (para distinguirlo del que llevaban a cabo los griegos, a quienes Descartes llamaba los "antiguos"). Es por esta razón que a la geometría introducida en esta obra se le comenzó a llamar "analítica".

También en honor a Descartes se bautizó al sistema de coordenadas y al plano mismo donde se definen éstas como cartesiano.




Mucha de la importancia de las cónicas viene también de su importancia para describir fenómenos físicos. Ejemplos de esto abundan, pero quizá una de las propiedades más interesantes y conocidas desde los tiempos de Arquímedes es la llamada propiedad óptica de las cónicas. Por ejemplo, en el caso de la elipse, si la curva fuese un espejo y colocáramos en uno de los focos una lámpara apuntando hacia la elipse, el reflejo sería visible en el otro foco. Dependiendo de la intensidad de la lámpara y de lo pulido que estuviera el espejo, el rayo de luz saldría de este foco para reflejarse nuevamente sobre la elipse e ir al otro foco. Con un rayo láser en uno de los focos y un espejo elíptico ideal, ¡esta situación podría continuarse indefinidamente! (La propiedad óptica de la hipérbola es análoga y se utiliza para algunos telescopios y sistemas de posicionamiento global).



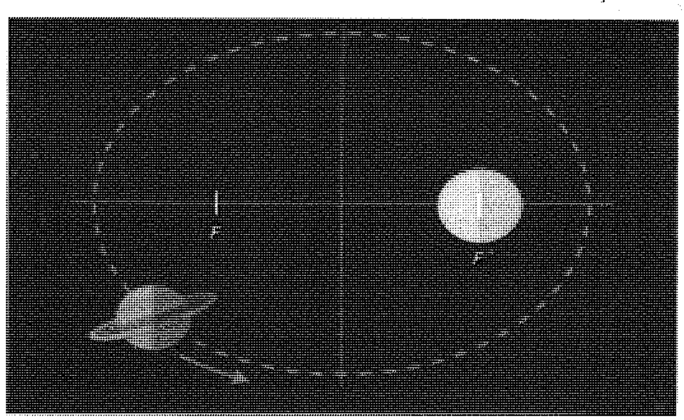

En el caso de la parábola, esta propiedad es responsable de mucha de la comunicación satelital de las últimas décadas y, seguramente, habrás escuchado que hay un tipo de antenas llamadas "parabólicas". En una parábola formada de algún material reflejante todos los rayos (u ondas sonoras) que viajen de manera paralela al eje focal se concentrarán en el foco después de chocar con la parábola.

Estos no son los únicos ejemplos de la aplicación de las cónicas a problemas físicos. Galileo Galilei (1564 - 1642) en su obra *Diálogo sobre los Sistemas del Mundo* (1632), concluye que los proyectiles siguen, debido a la fuerza de gravedad, una trayectoria parabólica; es decir, en la resolución de los problemas de balística y del lanzamiento mismo de los cohetes espaciales debe tomarse en consideración que la trayectoria que seguirían los proyectiles sería un parábola.

Sin embargo, fue Johannes Kepler (1571 - 1630) quien introdujo las cónicas en la descripción y predicción de la órbita de Marte alrededor del Sol en su libro *Astronomia Nova* (1609). En este trabajo, Kepler muestra que la trayectoria necesariamente es una elipse. La afirmación de que todos los planetas del Sistema Solar siguen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos tendría que esperar hasta el Sumario de Astronomía Copernicana (1622). De este modo podemos citar la primera ley de Kepler tal y como se sigue enseñando en nuestros días:

> Los planetas se desplazan siguiendo órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.

De este modo, si definimos un sistema cartesiano de coordenadas, elegimos una escala adecuada para representar las magnitudes exorbitantes del Sistema Solar y conocemos las distancias involucradas, es posible conocer la ecuación canónica de la elipse descrita por cualquiera de los planetas.




Es importante mencionar que lo anterior sólo nos daría la trayectoria seguida por el planeta. En ningún caso nos diría la velocidad con que la recorre o cómo se relaciona el periodo orbital (el tiempo que se tarda un planeta en recorrer su órbita) con la distancia promedio al Sol. Estos aspectos se tratan en la segunda y la tercera leyes de Kepler.

Ejemplo

La tercera ley de Kepler es muy útil para conocer las distancias promedio de los distintos planetas al Sol. Nos dice que los cuadrados de los periodos orbitales son proporcionales a los cubos de las distancias promedio al Sol. Es decir, si $T_1$, $T_2$ son los periodos orbitales de dos planetas $m_1$, $m_2$ cuyas distancias promedio al Sol son $d_1$ y $d_2$, entonces:

$$\frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}}=\frac{d_1^{\,3}}{d_2^{\,3}}$$

Por ejemplo, en el caso de Marte sabemos que su periodo orbital es de 1.8809 años terrestres. De modo que si usamos la información del periodo orbital de la Tierra (1 año) y su distancia promedio al Sol (1 UA o unidad astronómica que equivale, aproximadamente, a $1.5 \times 10^8$ km) tendremos:

$$\frac{1.8809^2}{1^2}=\frac{d_1^{\,3}}{1^3},$$

que al despejar nos da $d_1=\sqrt[3]{1.8809^2}\approx 1.5237\,\text{UA}$. Dado que la órbita de Marte es una elipse con una excentricidad $e = 0.093$ (es decir, podría tomarse casi como una circunferencia) $d_1$ puede tomarse prácticamente como la distancia del centro al vértice (o sea $a$). De este modo si representamos por $a - c$ la distancia del vértice más próximo al foco (el punto en que el planeta se encuentra más cerca del Sol o *afelio*) y por $a + c$ la distancia de dicho foco al otro vértice (esto es, el punto en que el planeta se encuentra más alejado del Sol o *perihelio*), tendremos para el caso de Marte:

$$\text{Afelio} = a - c = a \times (1 - e) = 1.5237 \times (1 - 0.093) = 1.3819 \text{ UA.}$$

$$\text{Perihelio} = a + c = a \times (1+e) = 1.5237 \times (1 + 0.093) = 1.6654 \text{ UA.}$$

Para concluir, la longitud ($2a$) del eje mayor de la elipse que describe la órbita de Marte puede obtenerse sumando afelio y perihelio (para el caso de Marte, es de 3.0473 UA) mientras que el semieje menor puede obtenerse de la relación $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 \times (1 - e^2)$. Sustituyendo la excentricidad y el valor de $a$ en la expresión anterior obtendremos $b = 1.5171$ UA.

De este modo, la elipse horizontal que representa la órbita de Marte alrededor del Sol (si el centro de la elipse es el origen del plano cartesiano) es:

$$\frac{x^2}{2.3217}+\frac{y^2}{2.3016}=1,$$

con el Sol ubicado, por ejemplo, en el foco que está en (0.1418, 0).

## Actividad de aprendizaje 16

**Lleva a cabo en tu cuaderno las operaciones que se te piden y contesta las preguntas con base en lo visto en esta sección.**

1. El planeta enano Plutón tiene una excentricidad $e = 0.2488$ y su periodo orbital es de 248 años terrestres. ¿Cuál es su distancia promedio al Sol en unidades astronómicas? ¿Cuál es su afelio y su perihelio? ¿Cuáles son las longitudes de los ejes mayor y menor de su órbita?

Si el centro de la elipse está en el origen ¿cuál es la ecuación que describe la órbita seguida por Plutón? Di en qué punto del sistema coordenado se encontraría el Sol en tu modelo.

2. En el ejemplo de Marte y en el ejercicio anterior relativo a Plutón, el Sol tiene coordenadas que lo ubican en distintos puntos ¿cómo podemos corregir esto? Discute de manera cortés y respetuosa tu solución con la de tus compañeros. (Ayúdate trazando una de las elipses (por ejemplo la de Marte) en una hoja de papel y la de Plutón en una hoja de papel china o albanene para que puedas ver ambas curvas. Luego haz coincidir los focos sin que las elipses se toquen ¿Adónde se desplazó el centro de la elipse que representa la órbita de Plutón? ¿Cómo modifica esto su ecuación si quisiéramos escribirla y trazar la curva resultante en el mismo pedazo de papel donde dibujamos la órbita de Marte?

## Actividad de aprendizaje 17

Productos esperados

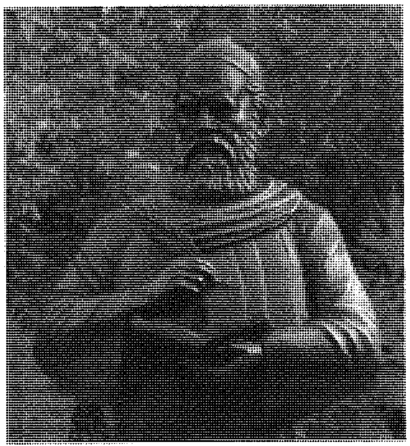
**En una hoja (o más) de papel milimétrico registra todas tus respuestas a la actividad. Después guárdala en tu portafolio de evidencias.**

La distancia promedio de la Tierra al Sol es de 1 UA y su periodo orbital es de 1 año, sin embargo la excentricidad de su órbita es $e = 0.0167$. Razonando de manera análoga al ejemplo de Marte ¿cuál es el afelio y el perihelio de la Tierra en unidades astronómicas? ¿Cuál es la longitud de los ejes mayor y menor? Si el centro de la elipse está en el origen ¿cuál es la ecuación que describe la órbita de la Tierra y en qué punto del sistema coordenado se encontraría el Sol? No olvides trazar la elipse e indicar todos los elementos que encontraste.

### ¿La bicicleta elíptica, es en verdad elíptica?

Tal vez has escuchado el término bicicleta elíptica que se trata de un aparato para hacer calentamiento antes de realizar alguna rutina de ejercicio. Este aparato ha sido ligado al concepto de elipse, por la forma en que se mueven los pies y la rueda delantera. La problemática se genera ya que dicho aparato no forma una elipse como tal. Con la imagen podrás activar el video ¿Bicicleta elíptica?, en el que verás una explicación de porqué dicho aparato no forma una elipse. Descarga la aplicación en tu celular y disfrútalo.

# Suma anécdota



El calendario *gregoriano* que se utiliza en la actualidad en nuestro país fue promovido por el papa Gregorio XIII quien, en 1582, lo implantó para sustituir al calendario *juliano* (utilizado desde que el emperador romano Julio César lo instaurara en el año 46 antes de nuestra era). El calendario juliano tenía un error de 3 días cada 400 años, mientras que el calendario gregoriano tiene un error de un día cada 3 330 años (razón por la que no ha sido necesario corregirlo por el momento).

Sin embargo, en Irán y Afganistán se utiliza actualmente un calendario mucho más exacto que el gregoriano (que posee un error de un día cada 3 770 años) y que comenzó su vigencia mucho antes (está en vigor desde el 15 de marzo de 1079). Fue elaborado por un astrónomo que además fue matemático, filósofo, médico, abogado y uno de los poetas más sublimes de la literatura persa: Omar Jayam (ca. 1048 - 1131).

Omar emigró a los 22 años a la legendaria ciudad de Samarcanda, donde pudo completar su *Tesis sobre demostraciones de álgebra y comparación*. En esta obra desarrolló el primer método para resolver ecuaciones de segundo y de tercer grado empleando circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas. Con ello tendió un puente entre el *álgebra* (desarrollada por Al-Juarismi) y la tradición geométrica de los griegos (la cual era celosamente cultivada en el mundo árabe).

Sus procedimientos se anticiparon casi seis siglos a los del francés René Descartes (padre de la geometría analítica) y sus descubrimientos científicos le hicieron merecedor del reconocimiento del sultán Malik Shah I, quien además de encargarle a Omar Jayam la reforma del calendario, le pidió que instalara un observatorio en Isfahán. Omar no sólo fue su primer director durante 18 años, sino que hizo de él un centro de investigación excepcional.

Como puedes ver, la identificación que utilizamos en este capítulo entre la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y las distintas curvas que nos interesan tiene una larga historia. Y de sus muchos protagonistas hubo uno que supo conciliar las ciencias y las artes ¡y hasta tuvo tiempo de sobra para reformar el calendario!

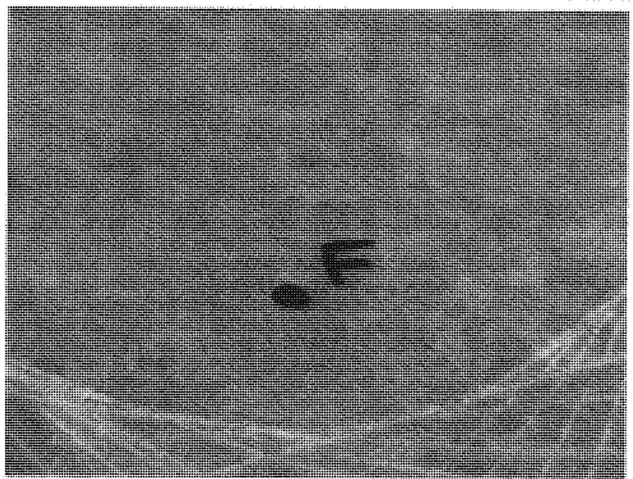
**Reflexiona lo siguiente.**

1. ¿Has logrado alguno de tus objetivos a pesar de que alguien te haya desanimado a hacerlo?
2. ¿Te has arrepentido al haber cancelado un proyecto por influencia de alguien?
3. ¿Crees que el mundo sería el mismo si personajes como Omar Jayam hubieran claudicado en sus proyectos?

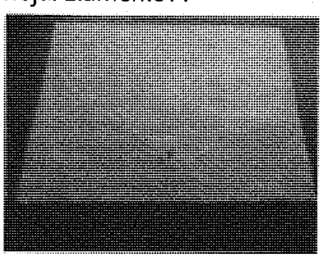
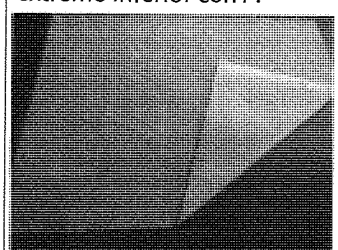
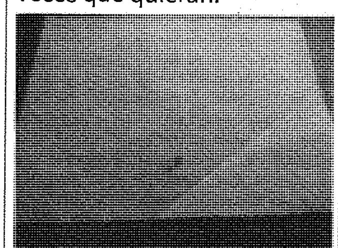
## Proyecto integrador

**Es el final del segundo parcial y deberás poner en práctica tus conocimientos.**

Construye una parábola con dobleces de papel.




1. Organícense en equipos.
2. Consigan hojas de papel albanene o papel arroz. En su defecto, pueden utilizar mica o cualquier material flexible y traslúcido.
3. Lleven a cabo los siguientes pasos.

| Marquen un punto en la hoja. Llámenle *F*. | Doblen la hoja uniendo el extremo inferior con *F*. | Desdoblen y repitan las veces que quieran. |
|---|---|---|
|  |  |  |

Deberán obtener algo similar a la imagen del inicio.

4. Elaboren un reporte en el que respondan las preguntas siguientes. Incluyan sus hojas con los trazos.
   a. ¿Por qué esos dobleces forman una parábola?
   b. ¿Quién es la directriz de la parábola?
   c. ¿Qué nombre recibe el conjunto de líneas tangentes que forman a la parábola?

## Evalúa tus evidencias

**Utiliza la lista de cotejo para identificar lo que dominas con base en las evidencias generadas y guardadas en tu portafolio.**

| Productos | Criterios | Sí | No |
|---|---|---|---|
| Argumentar las diferencias visibles entre una recta y una parábola. Actividad 8. | El o los papeles quedaron impresos correctamente, se aprecia la ruta que siguieron las canicas. | | |
| | Identifico las figuras generadas con las huellas de las canicas e identifico sus elementos. | | |
| | Reconozco las diferencias entre las tres figuras impresas y entiendo cómo se generan y qué propiedades poseen. | | |
| Construir una elipse que describa el movimiento de la Tierra en torno del Sol. Actividad 17. | Encuentro el afelio y el perihelio correctamente. | | |
| | Hallo los ejes de la elipse y los extremos, tomando en cuenta el origen sugerido. | | |
| | Encuentro la ecuación idónea de la elipse y la trazo adecuadamente, encuentro la posición del Sol en la gráfica. | | |

## Rúbrica

Con base en la rúbrica, identifica tu nivel logrado en cada aprendizaje esperado. Recuerda repasar los temas para mejorar.

| Aprendizajes esperados | Básico | Autónomo | Estratégico |
|---|---|---|---|
| Caracteriza y distingue a los lugares geométricos según sus disposiciones y sus relaciones. | Identifico los lugares geométricos y sus componentes, reconozco sus propiedades básicas. | Conozco las formas generales y ordinarias de cada lugar geométrico, ubico sus elementos con base en ello. | Interpreto correctamente cada lugar geométrico, las propiedades, orientación y puntos principales, puedo ir de la gráfica a la ecuación y viceversa. |

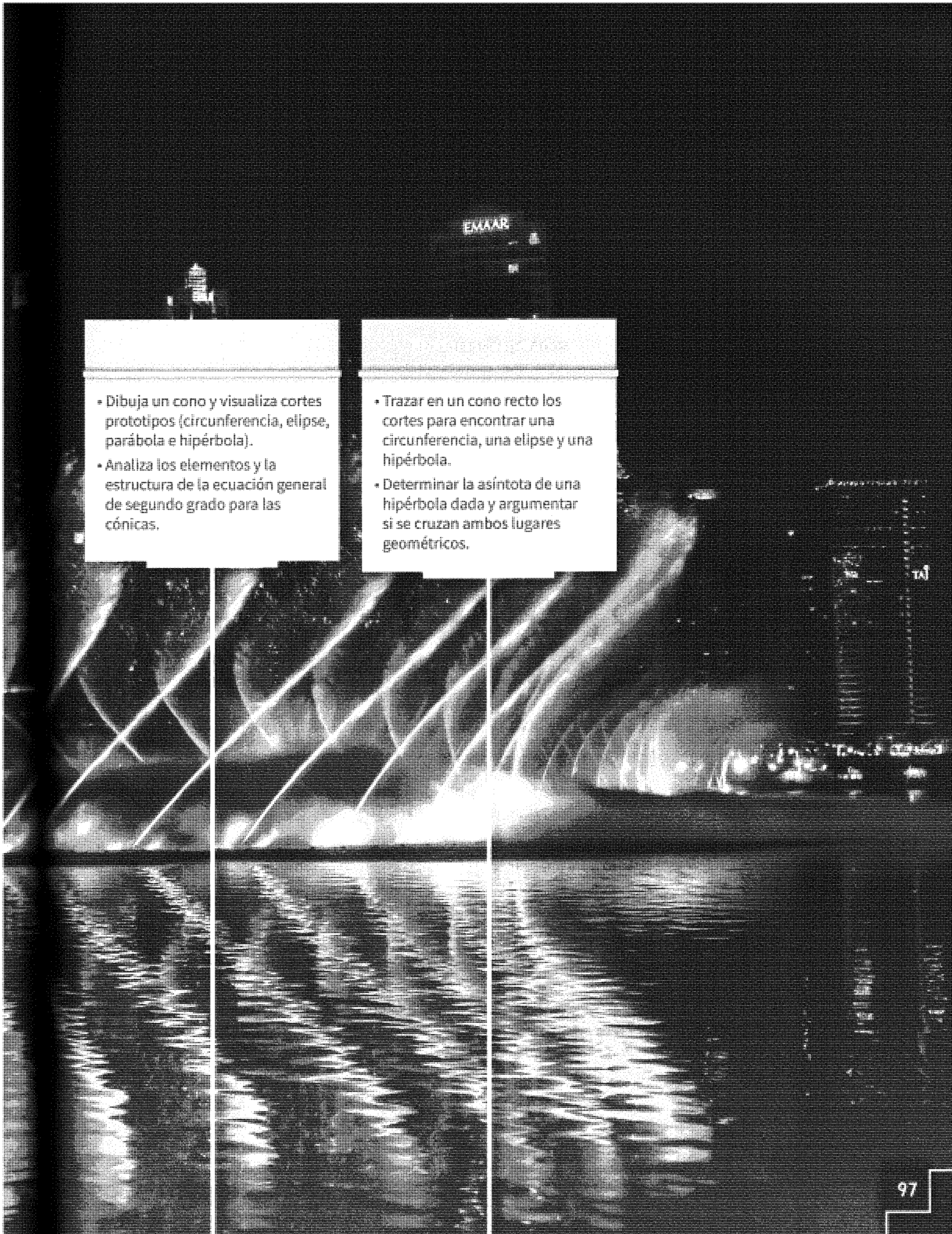
# Tercer parcial

## Eje: Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.

- Sistema de referencia y localización: elementos de geometría analítica.

- Tratamiento visual y representaciones múltiples de los lugares geométricos: coordenadas rectangulares y paramétricas, puntos singulares, raíces y comportamiento asintótico.

- ¿Por qué los lugares geométricos tratados analíticamente resultan útiles para el tratamiento en diferentes situaciones contextuales?
- Dibuja un cono y visualiza sus cortes. ¿Qué figuras reconoces?, ¿de qué depende la forma que tenga el corte sobre el cono?
- Analiza los elementos de la ecuación general de las cónicas. ¿Por qué todas son ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas?
- Tabula y puntea en el plano distintos puntos de una parábola, lo miso para una circunferencia, una elipse y una hipérbola. ¿Qué son las asíntotas?




- Dibuja un cono y visualiza cortes prototipos (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola).
- Analiza los elementos y la estructura de la ecuación general de segundo grado para las cónicas.

- Trazar en un cono recto los cortes para encontrar una circunferencia, una elipse y una hipérbola.
- Determinar la asíntota de una hipérbola dada y argumentar si se cruzan ambos lugares geométricos.

# Habilidades socioemocionales

## Dimensión: Elige T

Para trabajar con: uno mismo

Tiempo de planeación: No se requiere

Duración estimada: 20 min

Habilidades generales en entrenamiento: toma responsable de decisiones

Habilidades específicas en entrenamiento: análisis de consecuencias

## Para reflexionar...

¿Recuerdas situaciones en las que tomaste decisiones precipitadas y éstas tuvieron consecuencias desagradables? ¿Sabías que hay estrategias que te permiten pensar y revisar las posibles consecuencias para realizar la mejor elección ante situaciones complicadas?

**La actividad pertenece al programa ConstruyeT, diseñado para ayudarte a desarrollar tus habilidades socioemocionales. Consulta la página de internet para obtener más actividades.**

**Nuestro objetivo:**

Conocer alternativas para analizar consecuencias antes de tomar decisiones.

**Condiciones y materiales deseables:**

Bolígrafos y hojas.

Paso a paso:

1. Identifica una situación sobre la cual debes tomar una decisión.
2. Elabora un cuadro como el que se muestra a continuación.

Detonador: Trabajar o no trabajar mientras estudio el [illegible]

| Disyuntiva (opciones) | Pros | Contras | Evaluación general y decisión |
|---|---|---|---|
| Trabajar o no trabajar | Obtener dinero extra. | No invertiré el tiempo necesario al estudio. | Decido y elijo no trabajar por ahora. |

3. Valora las consecuencias de cada opción a corto, mediano y largo plazo.
4. Analiza: ¿Cómo te sentirías en cada una de las decisiones?
5. Considera las consecuencias y posibles resultados: ¿Te afecta de manera positiva o negativa? ¿Afecta a tus amistades o a tu familia?
6. Con base en el análisis, toma la decisión que consideres adecuada. Puedes utilizar este cuadro para analizar consecuencias en diversos temas, ya sean académicos o de la vida diaria.

**Para terminar...**

¿Cómo seré una mejor persona?, ¿cómo seremos una mejor comunidad?

La habilidad para identificar y evaluar críticamente las repercusiones de tus posibles decisiones en es análisis de consecuencias. Al desarrollarla podrás considerar los resultados de diversas alternativas antes de tomas alguna decisión.

# Proyecto de vida

A lo largo del semestre desarrollaremos tu Proyecto de vida, con el fin de clarificar lo que deseas para ti y que puedas tomar decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como realizar una reflexión sobre las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

**Continúa con tu proyecto de vida**

1. Responde lo que se pide.

   a. Con base en lo trabajado en estos meses, escribe una evaluación de cómo has llevado tu proyecto. ¿Has avanzado en tus metas? ¿Detuviste algún propósito? ¿Cuáles son los obstáculos que has encontrado?

   ______________________________________________

   ______________________________________________

   ______________________________________________

   ______________________________________________

   ______________________________________________

   ______________________________________________

   b. Reflexiona y escribe qué te motiva a continuar con tus planes iniciales.

   ______________________________________________

   ______________________________________________

   ______________________________________________

   ______________________________________________

   ______________________________________________

   ______________________________________________

2. Continúa con tu organizador gráfico. Enriquécelo con notas, fotos, noticias y experiencias que te motiven.

**Si aún no inicias tu Proyecto de vida...**

No olvides que mereces ser la persona que tienes en mente: estudiosa, divertida, alegre, responsable o exitosa, además tú defines lo que eso significa. No hay parámetros establecidos para medir el éxito personal, esos los pones tú.

Recuerda que lo que has hecho hasta este momento no te define ni define tu futuro, así que si aún no inicias tu proyecto de vida nunca es tarde para comenzar. ¡Adelante!

# Aplicaciones de los lugares geométricos en situaciones contextualizadas

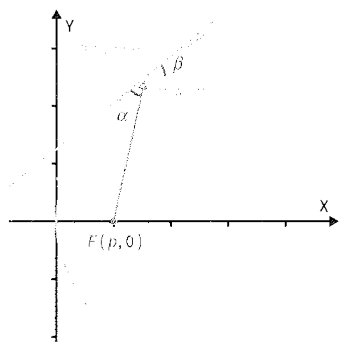
## Soluciones de problemas contextualizados

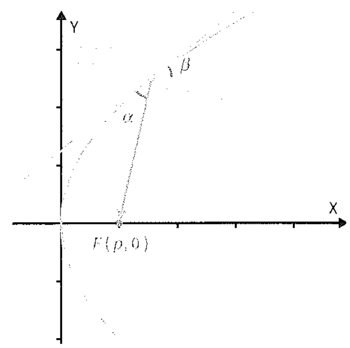
La parábola, la elipse y la hipérbola tienen una propiedad llamada propiedad reflectora y aunque no la aplicaremos es importante que la conozcas pues es la responsable de avances tecnológicos como el GPS.

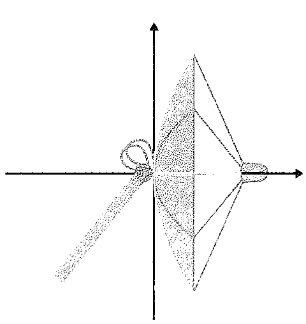
### Propiedad reflectora

La propiedad reflectora de la parábola dice lo siguiente:

> Un rayo emitido desde el foco de la parábola que incide en un punto $P$ de ésta es reflejado paralelo al eje de simetría (izquierda) y viceversa, un rayo paralelo al eje de la parábola, proveniente de una fuente externa, al incidir en un punto $P$ de la parábola se refleja hacia el foco. Además, los ángulos que se forman entre el rayo y la recta tangente, en el punto en el que inciden ($P$), son iguales.



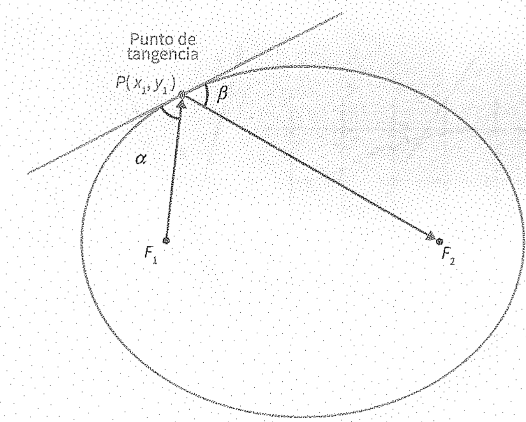



En esta propiedad se basan los espejos de los telescopios reflectores, antenas satelitales de TV, los espejos de un faro y los micrófonos de campo que se utilizan en los partidos de futbol. Si observas bien notarás que todos estos objetos tienen forma de un paraboloide, una superficie que se obtiene girar una parábola sobre su eje. Es decir que si se hace un corte transversal justo en medio se obtiene la parábola generadora.

## Propiedad reflectora de la elipse

La propiedad reflectora de la elipse dice lo siguiente:

Un rayo emitido desde uno de los focos $F_1$ de la elipse, al incidir en un punto $P$ de ésta, es reflejado hacia el foco $F_2$. Además, los ángulos que se forman entre el rayo y la recta tangente a la elipse en $P$ es igual al ángulo que se forma entre la recta tangente y el rayo reflejado.

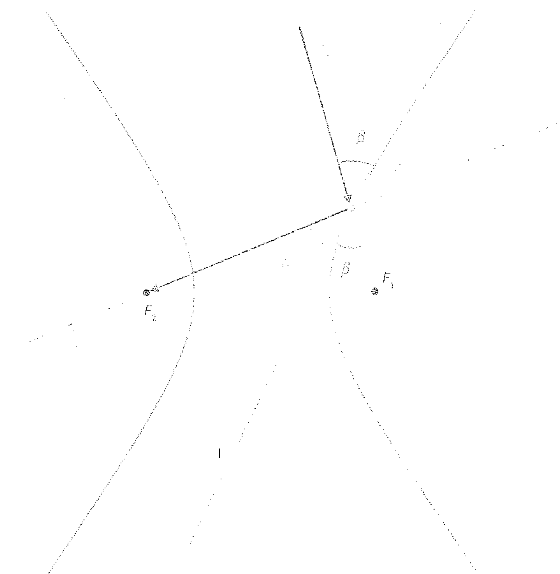



Una aplicación de esta propiedad está en la construcción de estructuras conocidas como *gabinetes de secretos*, que son espacios con límites elipsoidales (superficies tridimensionales obtenidas al rotar una elipse sobre su eje mayor), en las que, por la propiedad reflectora, una persona que habla en uno de los focos será escuchada únicamente por la que esté situada en el otro foco.

Gabinete de los secretos de la Catedral San Pablo, Londres.

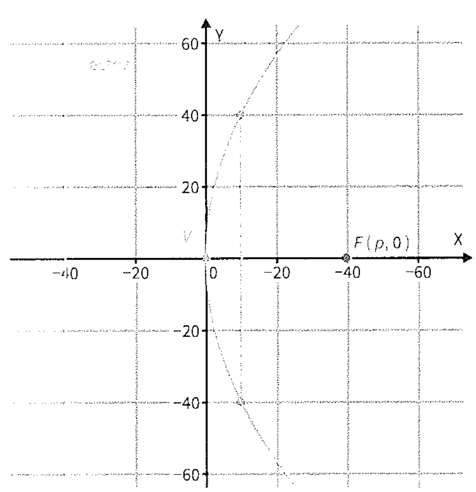
La propiedad reflectora de la hipérbola dice lo siguiente:

> Si un rayo de luz viaja sobre la recta que pasa por $P$ y el foco $F_1$ ($l_1$), donde $P$ es el punto de tangencia de la hipérbola con la recta $l$, al incidir en $P$ éste se refleja sobre la recta $l_2$ en dirección a $F_2$. Los ángulos que se forman entre la recta tangente y las rectas $l_1$ y $l_2$ son iguales entre sí.




Resolveremos tres ejercicios que involucran secciones cónicas.

### Ejemplo




Calcularemos la distancia entre el foco y el vértice de la parábola generadora de una antena parabólica cuyo disco tiene un diámetro de 80 cm y una profundidad de 10 cm.

Colocamos el vértice de la parábola generadora en el punto (0, 0), además podemos pensarla con su eje paralelo al eje X, por lo tanto su ecuación es de la forma $y^2 = 4px$.

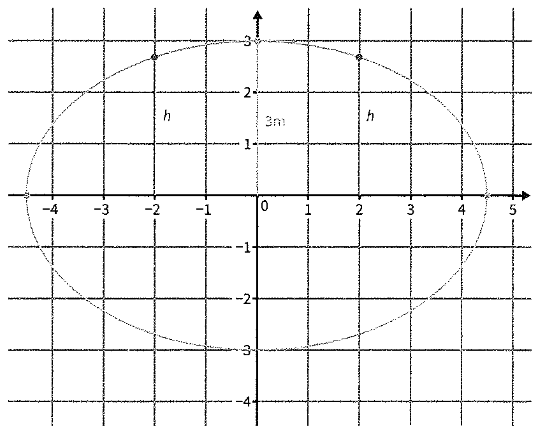
Como el punto (10, 40) está en la parábola sabemos que $40^2 = 4p(10)$. Así $p = 40$ cm.

### Ejemplo

Un puente en una carretera tiene forma semielíptica (la mitad de una elipse) con eje mayor horizontal y longitud de 9 m. Si la parte más alta del arco está a 3 m arriba del pavimento horizontal, calcularemos cuánto mide la altura a 2 m del centro de la elipse.

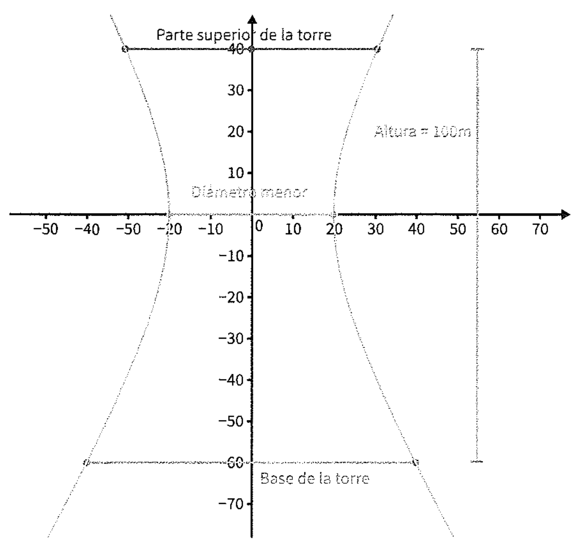
Primero situamos los ejes de la elipse sobre los ejes X y Y y la centramos en el origen. Observa que el eje X queda sobre la carretera. De esta manera sabemos que $a = 4.5$ y $b = 3$ así que la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{4.5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$. Como buscamos la altura a dos metros del punto (0, 0), basta sustituir $x = 2$ y despejar el valor de $y$:

$$\frac{4}{20.25}+\frac{y^2}{9}=1$$
$$\frac{y^2}{9}=1-\frac{4}{20.25}$$
$$\frac{y^2}{9}\approx 1-0.1975$$
$$\frac{y^2}{9}\approx 0.8025$$
$$y^2\approx 7.2225$$
$$y\approx 2.69.$$




### Ejemplo

Si el diámetro de la base de una torre hiperbólica es de 80 m, su diámetro más pequeño se encuentra a 60 m de la base y es de 40 m, ¿cuál es el diámetro de la parte más alta si la altura de la torre es de 100 m?




Situamos el eje X en la parte más angosta de la torre, y al eje Y justo a la mitad de la torre, es decir que los vértices de la hipérbola son (–20, 0) y (20, 0), dado que el diámetro más pequeño es de 40 m. De esto concluimos que $a = 20$, así que la ecuación de la hipérbola tiene la forma

$$\frac{x^2}{400}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

de la que nos falta conocer $b$.

| Encontramos *b* | Encontramos el valor de *x* cuando $y = 40$ |
|---|---|
| Como sabemos que la base tiene un diámetro de 80 m y de ésta a la parte más angosta hay una distancia de 60 m, los puntos (-40, -60) y (40, -60) están en la hipérbola, es decir que si los sustituimos en la ecuación anterior podremos obtener el valor de b: $$\frac{40^2}{400}-\frac{(-60)^2}{b^2}=1$$ $$\frac{1600}{400}-\frac{3600}{b^2}=1$$ $$4-\frac{3600}{b^2}=1$$ $$4-1=\frac{3600}{b^2}$$ $$b^2=\frac{3600}{3}$$ $$b^2=1200$$ | Una vez que tenemos la ecuación de la hipérbola, debemos sustituir el valor de y = 40, pues la torre mide 100 m de alto y por el sistema de referencia que tomamos, el alto de la torre está en $y = 40$. Luego despejamos $x$. $$\frac{x^2}{400}-\frac{y^2}{1200}=1$$ $$\frac{x^2}{400}-\frac{(40)^2}{1200}=1$$ $$\frac{x^2}{400}-\frac{4}{3}=1$$ $$\frac{x^2}{400}=1+\frac{4}{3}$$ $$\frac{x^2}{400}=\frac{7}{3}$$ $$x^2=\frac{400\cdot 7}{3}$$ $$x\approx 30.55$$ |

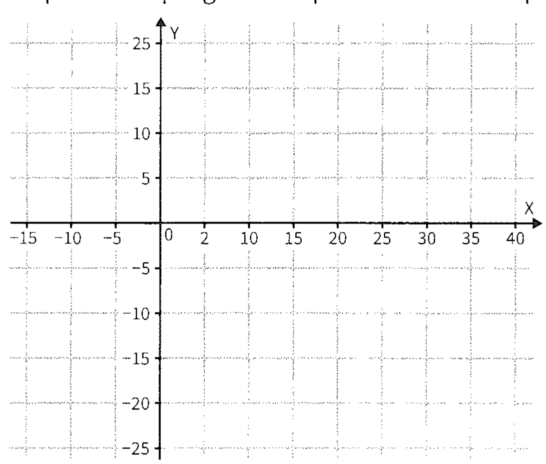
## Actividad

**Aplica lo aprendido de las secciones cónicas: sus definiciones, ecuaciones y parámetros, para resolver los siguientes ejercicios. Utiliza los planos cartesianos para trazar las gráficas y lo que necesites para poder responder.**

1. El espejo para un telescopio reflector tiene la forma de un paraboloide de 40 cm de diámetro y 5 cm de profundidad.

   ¿A qué distancia del centro del espejo se deberá poner el espejo secundario?

   Halla la ecuación de la parábola que genera el paraboloide del espejo.



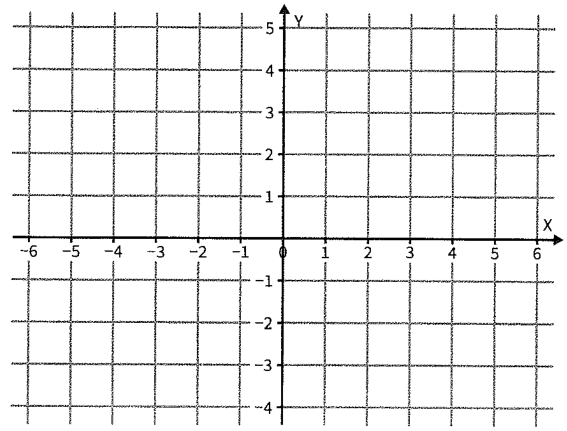
**2.** Un puente en una carretera tiene forma semielíptica (la mitad de una elipse) con eje mayor horizontal y longitud de 12 m. Si la parte más alta del arco está a 4 m arriba del pavimento horizontal, respondan lo que se pide.

a. ¿Cuánto mide la altura a 1 m del centro de la elipse?

b. ¿Cuánto mide la altura a 2.5 m del centro de la elipse?

c. ¿Cuánto mide la altura a 4 m de la elipse?

d. Traza la gráfica aproximada en el plano.



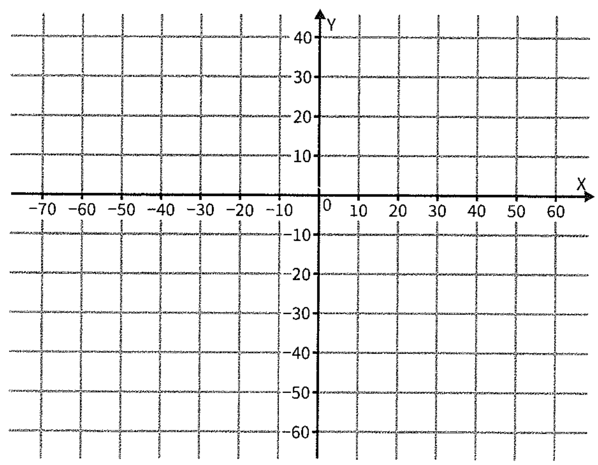

**3.** El diámetro de la base de una torre hiperbólica es de 120 m, su diámetro más pequeño se encuentra a 60 m de la base y es de 60 m. Si la altura de la torre es de 90 m, respondan lo que se pide.

a. ¿Cuál es el diámetro de la parte más alta?

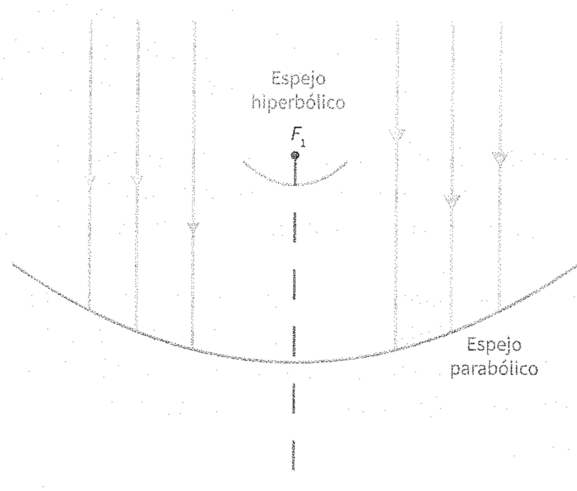
b. ¿Cuánto mide el diámetro a 50 m de altura?

c. ¿A qué altura el diámetro mide 60 m?

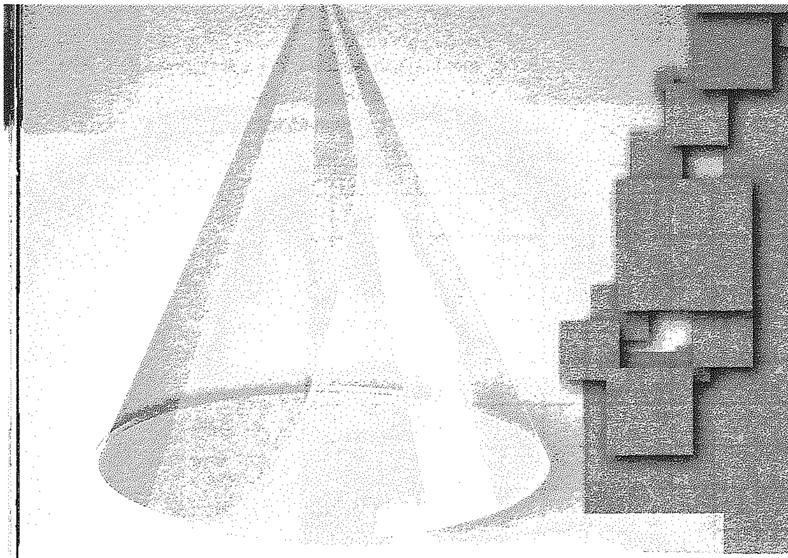
d. Traza la gráfica aproximada en el plano.




**4.** El diseño de un telescopio Cassegrain (que data de 1672) hace uso de las propiedades reflectoras de la parábola y la hipérbola. En la figura se muestra un espejo parabólico (seccionado), con foco en $F_1$ y eje a lo largo de la recta $l$ y un espejo hiperbólico, con un foco también en $F_1$ y eje transversal a lo largo de $l$. ¿En dónde, finalmente, se colectan las ondas de luz entrantes paralelas al eje común?



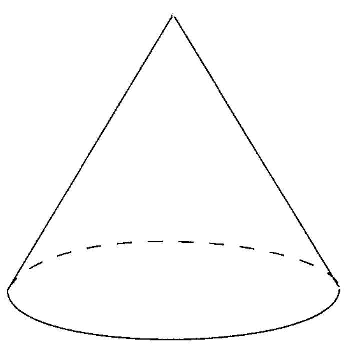

Ejercicio recuperado de: *Álgebra y trigonométrica con geometría analítica*, Swokowski/Cole, Cengage Learning.



# El cono y sus cortes

## Análisis de los cortes del cono mediante planos

En nuestra breve historia de las cónicas mencionamos que dicha denominación proviene de que los matemáticos de la Antigüedad clásica (Aristeo, Euclides y Apolonio), al carecer de un lenguaje algebraico que les permitiera representar toda una curva mediante una ecuación, las consideraban como objetos geométricos dados por la intersección de un **plano** y un **cono**. Asimismo dijimos que estos autores llamaban "un cono" a lo que nosotros llamaríamos hoy en día un par de conos que se tocan por el ápice (o la punta) y que se extienden indefinidamente hacia ambos lados.



Para nuestro análisis trabajaremos primero con un punto fijo $P$ en el espacio y un **plano base** que no contiene a dicho punto. Tirando una *perpendicular*, $h$, desde $P$ sobre el plano obtendremos otro punto (en el plano base) que usaremos como centro de una circunferencia de radio $r > 0$.

Si unimos cualquier punto de esta circunferencia con $P$ obtendremos una recta (a la que llamaremos $s$) que se prolonga indefinidamente por el espacio y que forma un ángulo positivo con $h$. A esta recta la llamaremos la **generatriz** del cono.

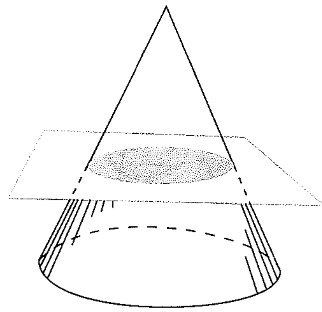
Haciendo que el punto de la generatriz que está sobre la circunferencia le dé una vuelta completa a ésta, obtendremos una superficie formada por un par de conos que únicamente se tocan en $P$ y que se prolongan tanto como lo hace la recta $s$ por el espacio.

Nos interesa ahora mostrar cómo, a partir de distintos cortes que hagamos sobre el cono al intersecarlo con distintos planos, podemos obtener todas las curvas que conocemos por secciones cónicas (la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola), así como algunos casos que llamaremos "degenerados" y que corresponden a situaciones extraordinarias o intersecciones con planos particulares.

Como no disponemos de las herramientas propias de la geometría analítica del espacio, la mayoría de nuestra discusión será en términos de la definición geométrica de las cónicas.

**La circunferencia.** Si denotamos por $Q$ a cualquier plano paralelo al plano base, $Q$ también será perpendicular a $h$ y cortará al cono en una figura similar a la que tenemos en la intersección entre el plano base y el cono. Por construcción, esta figura es una circunferencia.

El radio de la circunferencia puede obtenerse como función del ángulo $\theta$ (distinto de cero) entre $h$ y la generatriz del cono, así como de la distancia entre $P$ y el punto de intersección de $Q$ y $h$ (al que llamaremos $h'$) y la distancia entre $P$ y el punto de intersección de $Q$ y $s$ (al que llamaremos $s'$).

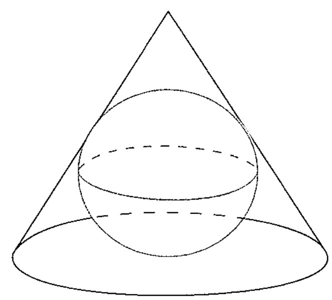


De este modo el radio $r_Q$ de la sección cónica obtenida al cortar el cono con el plano $Q$ será:

$$r_Q = \text{dist}(P, s') \text{ sen } \theta = \text{dist}(P, h') \cos \theta;$$

precisamente porque el triángulo $Ph's'$ es rectángulo.

Sin embargo, si el plano $Q$ pasa por $P$ entonces tanto $h'$ como $s'$ coinciden con $P$. De este modo dist($P$, $s'$) = dist($P$, $h'$) = 0 y el radio $r_Q$ = 0. Este es un caso degenerado en el que la circunferencia se colapsa a un punto en el plano $Q$: $P$.



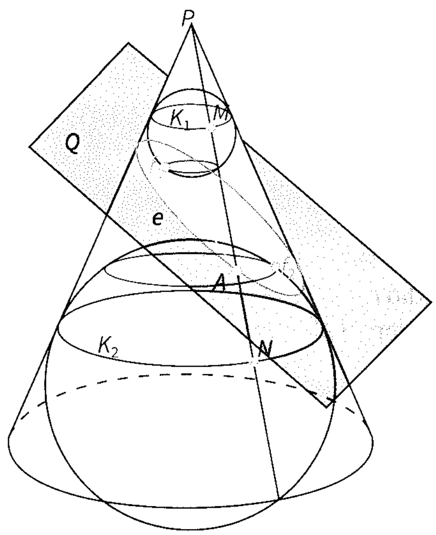
Un recurso que mencionaremos de paso (y que ayuda a fijar ideas) consiste en suponer que el punto $P$ es una fuente luminosa que proyecta la sombra de una esfera que está contenida dentro del cono y que es *tangente* a éste. La curva que forman todos los puntos de tangencia con el cono es una circunferencia que está plasmada tanto en la esfera como en el cono y, como tal, podría obtenerse como la intersección del cono y un plano $Q^*$ paralelo al plano base. Si a continuación colocamos otros dos planos, $R_1$ y $R_2$, solo que ambos tangentes a la esfera en los puntos en que h la atraviesa (puntos que denotaremos por $f_1$ y $f_2$, respectivamente), no es difícil argumentar por qué $h$ pasa por el centro de la esfera y que, por lo tanto, $R_1$ y $R_2$ serán paralelos a $Q^*$, al plano base y también serán paralelos entre sí. Lo anterior mostraría que la sombra que proyecta una esfera sobre un plano tangente (cuando la luz se encuentra en algún punto de la línea determinada por el punto de tangencia y el centro de la esfera) es un círculo.

Así como en el párrafo anterior colocamos a una esfera tangente al cono entre dos planos paralelos al plano base, la construcción anterior se puede realizar colocando un plano paralelo al plano base entre dos esferas tangentes al cono, $S$ y $S^*$, ambas tangentes entre sí (en alguno de los puntos $f_1$ o $f_2$ de $S$) y con dicho plano tangente a ambas en este punto.

**La elipse.** Si el plano $Q$ dejara de ser paralelo al plano base y comenzara a inclinarse ligeramente, disminuyendo cada vez más, pero aún formando un ángulo de inclinación con $h$ mayor que $\theta$ (que es precisamente el ángulo que forman $h$ y la generatriz del cono) ¿qué sección hallaríamos sobre $Q$?

La mayoría estaríamos de acuerdo en que un primer momento hallaríamos algo difícil de distinguir de una circunferencia; pero, conforme el ángulo de inclinación que forman el plano $Q$ y la recta $h$ siguiera variando, la diferencia sería cada vez más perceptible en el contorno definido sobre $Q$.

Si por encima del plano $Q$ tuviésemos una esfera tangente al plano y al cono (como las que mencionamos al finalizar el caso de la circunferencia), al inclinar el plano nos sería imposible meter más la esfera en la abertura que forman $h$ y la generatriz $s$. Esto sólo indica que al inclinar el plano $Q$ el punto de tangencia de éste con la esfera dejaría de encontrarse sobre la recta $h$. Si por el contrario la esfera tangente estuviera atrapada entre el plano $Q$ y el plano base y este último fuese inamovible, sería imposible sacar a la esfera del cono inclinando al plano $Q$. Esto indica, que también en este caso el punto de tangencia de éste con la esfera dejaría de hallarse sobre la recta $h$.




Si $A$ es cualquier punto en la intersección del cono con $Q$, denotaremos por $f_1$ y $f_2$ a los puntos de tangencia de dicho plano con las esferas (tangentes al cono) $S$ y $S^*$, respectivamente. Ahora al trazar la generatriz que pasa por $A$, ésta cortará a la circunferencia $k_1$ (definida por el cono y $S$) en un único punto $M$ y de igual manera corta a la circunferencia $k_2$ (definida por el cono y $S^*$) en un único punto $N$.

Como $A$ define dos segmentos tangentes a la misma esfera, la distancia entre $A$ y $M$ es la misma que la distancia entre $A$ y $f_1$. Del mismo modo:

$$\text{dist}(A, N) = \text{dist}(A, f_2).$$

Sin embargo, la distancia entre $M$ y $N$ siempre es la misma, porque se trata de puntos sobre circunferencias paralelas al plano base que están determinados la generatriz. Esta “distancia a lo largo de la generatriz” entre $k_1$ y $k_2$ es un valor constante. De modo que si denotamos por $2a > 0$ a dicha constante, entonces tendremos:

$$\text{dist}(A, f_1) + \text{dist}(A, f_2) = \text{dist}(A, s_1) + \text{dist}(A, s_2) = 2a.$$

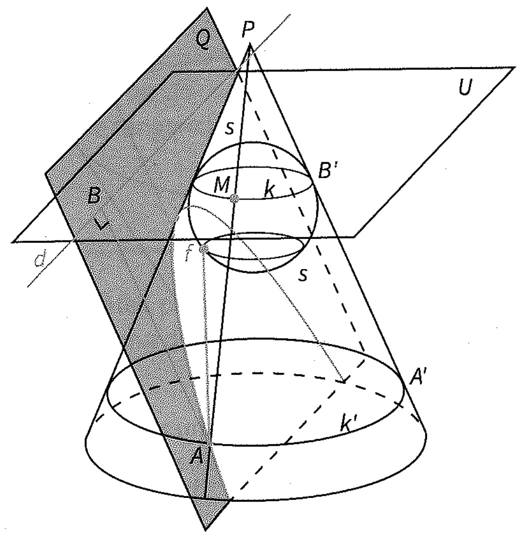
Como $A$ era un punto arbitrario en la intersección entre el cono y $Q$, podemos concluir que $A$ está sobre una elipse y que los puntos $f_1$ y $f_2$ son sus focos.

La sombra de la esfera cuando la fuente luminosa del punto $P$ ya no está sobre la perpendicular al plano que soporta la esfera y que pasa por el centro de ésta, ya no es una esfera. Mientras sea menor que 90°, pero positivo, será una elipse.

**La parábola.** Cuando el ángulo de inclinación entre el plano $Q$ y la recta $h$ alcanza el valor $\theta$ del ángulo entre $h$ y la generatriz, el plano $Q$ es paralelo a una generatriz que **no** intercepta.

En este caso la esfera $S$ sigue siendo tangente al plano $Q$ en el punto $f$; sin embargo la esfera $S^*$ ha sido desplazada fuera del cono ya que no podría seguir estando por debajo del plano $Q$ y ser tangente al cono a lo largo de una circunferencia paralela al plano base al mismo tiempo.

Sin embargo el plano $Q$ y el plano $U$ (que determina a la circunferencia $k$ a lo largo de la cual $S$ es tangente al cono) se interceptan a lo largo de una recta que denotaremos por $d$.




Si $A$ es un punto cualquiera en la curva definida por la intersección de $Q$ y el cono, entonces dist($A$, $f$) = dist($A$, $M$), donde $M$ es el único punto donde la generatriz $s$ interseca a la circunferencia $k$. La igualdad se debe a que $f$ y $M$ son ambos puntos de tangencia de la esfera $S$.

Si trazamos en el plano $Q$ una perpendicular a la recta d por el punto $A$ y denotamos por $B$ a la intersección, el segmento $AB$ será paralelo (y medirá lo mismo) que el segmento $A'B'$ a lo largo de una de las generatrices que no intersecan al plano $Q$. El segmento $A'B'$ irá del punto $B'$ en $k$ (porque tanto $B$ como $B'$ están sobre el plano $U$) a un punto $A'$ en el cono, el cual se encuentra sobre una circunferencia $k'$ que pasa por $A$ necesariamente.

Como dist($A$, $d$) = dist($A$, $B$) = dist($A'$, $B'$) = dist($A$, $M$) (recuérdese que las circunferencias sobre el cono se obtiene gracias a planos paralelos al plano base), entonces:

$$\text{dist}(A, f) = \text{dist}(A, d),$$

es decir, $A$ se encuentra sobre una parábola con foco en $f$ y directriz la recta $d$.

Podemos obtener un caso degenerado si $Q$ pasa por el punto $P$ y es tangente al cono a lo largo de una generatriz $s$. En esta situación la cónica se convierte en una recta “doble”.

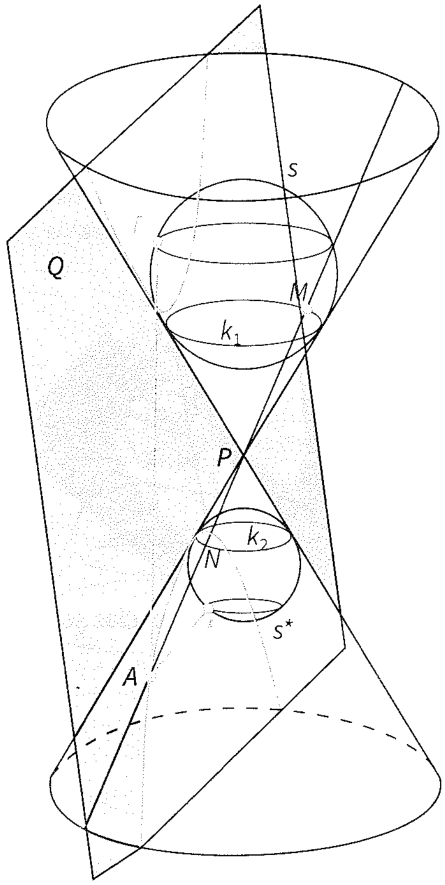
Asimismo, mencionaremos que si uno de los rayos luminosos que surgen de $P$ es *paralelo* al plano sobre el que se proyecta la sombra de la esfera (es decir el ángulo entre este rayo y la recta $h$ es de 90°), la sombra ya no será ni un círculo ni una elipse: se tratará de una parábola.

**La hipérbola**. Si el ángulo de inclinación es tal que el plano $Q$ es menor al ángulo $\theta$ entre la altura del cono y la generatriz, entonces $Q$ interseca al cono en la manera que ilustra la imagen siguiente.

En esta imagen tenemos dos esferas, $S$ y $S^*$, las cuales son tangentes al cono a lo largo de circunferencias ($k_1$ y $k_2$, respectivamente) así como a $Q$ en puntos $f_1$ y $f_2$.

Elíjase ahora un punto cualquiera en la curva dada por la intersección de $Q$ y el cono. Denotaremos a este punto por $A$ y trazaremos los segmentos $Af_1$ y $Af_2$. Nuestra intención es mostrar que el valor absoluto de la diferencia entre dist($A$, $f_1$) y dist($A$, $f_2$) es constante y que, por lo tanto, el punto $A$ está sobre una hipérbola.

Acaso lo anterior sea más sencillo para este caso de lo que fue para el caso de la parábola. Empezaremos trazando una generatriz, $s$, desde $A$ y pasando por $P$. Llamaremos a los puntos de intersección con las circunferencias tangentes ($k_1$ y $k_2$), $M$ y $N$, respectivamente.




Como los segmentos $AN$ y $Af_2$ son tangentes a la misma esfera y desde el mismo punto, dist($A$, $N$) = dist($A$, $f_2$). Por exactamente la misma razón dist($A$, $M$) = dist($A$, $f_1$). De este modo:

$$|\text{dist}(A, f_1) - \text{dist}(A, f_2)| = |\text{dist}(A, M) - \text{dist}(A, N)|;$$

pero este valor es precisamente la longitud, a lo largo de cualquier generatriz del cono, que separa a las circunferencias $k_1$ y $k_2$. Por lo tanto es un valor constante (que denotaremos por $2a$) y esto prueba que $A$ está en una hipérbola con focos $f_1$, $f_2$ y constante $2a$.

¿Podemos obtener un caso degenerado cuando el plano $Q$ tiene esta inclinación con respecto al plano base? La respuesta es sí. Pregúntate qué ocurriría si $Q$, además de cumplir esta condición, pasara por el punto $P$. ¿Cuál sería la forma de la curva dada por la intersección? Exactamente: se trataría de un par de rectas que se cortan en $P$.

También mencionaremos que una hipérbola puede obtenerse como la sombra que proyectan un par de esferas, de diferentes tamaños, cuando la fuente luminosa se ubica entre ellas.

**Conclusiones.** Como pudiste observar, la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola tienen más que ganado el nombre de "secciones cónicas". Son además una familia de curvas que pueden obtenerse cuando el ángulo $\beta$ que forma el plano de corte $Q$ con la altura del cono pasa continuamente de 90° a 0°. Si $\theta$ es el ángulo entre la recta $h$ y la generatriz del cono:

| Ángulo entre $Q$ y la recta $h$ | Sección obtenida en el plano $Q$ al intersecarlo con el cono |
|---|---|
| $\beta = 90°$ | Circunferencia |
| $\theta < \beta < 90°$ | Elipse |
| $\beta = \theta$ | Parábola |
| $0 \leq \beta < \theta$ | Hipérbola |

Los casos anteriores también pueden ser degenerados: la elipse o la circunferencia pueden degenerar en un punto, la parábola puede degenerar en una recta "doble" y la hipérbola puede degenerar en una par de rectas que se intersecan en un punto.

Concluiremos este análisis mencionando que el recurso utilizado para mostrar que efectivamente obteníamos secciones cónicas con las esferas dentro del cono se conoce como "esferas de Dandelin". Germinal Pierra Dandelin (1794 - 1847) fue un matemático, soldado y profesor de ingeniería francés que hizo importantes contribuciones al álgebra, la geometría y la probabilidad. Sin embargo, su resultado más famoso es el que presentamos aquí: si un plano corta a un cono, entonces los focos de la curva resultante en el plano son los puntos de tangencia de las esferas inscritas en el mismo cono.

## Actividad de aprendizaje 2

**Comenta, de manera ordenada y respetuosa, las siguientes preguntas con tus compañeros justificando cuidadosamente tus respuestas. Si surge alguna duda o discrepancia no vacilen en consultarla y resolverla con el docente.**

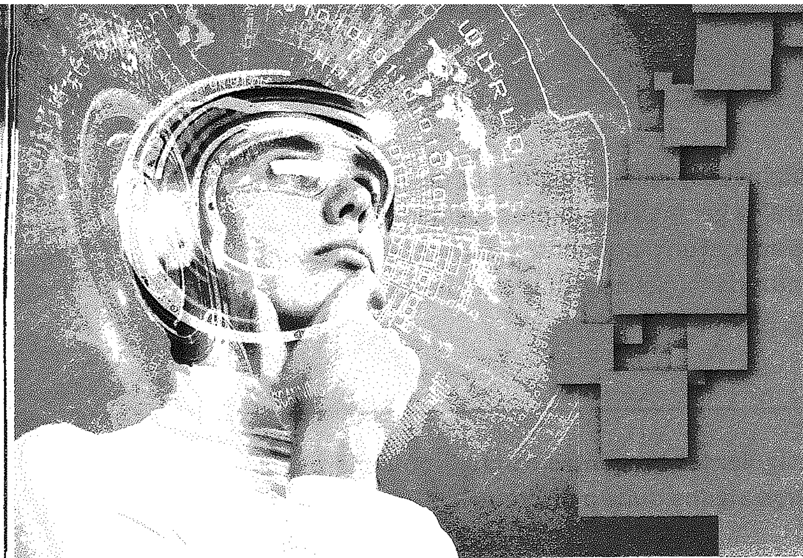
1. ¿Qué ocurre si en lugar de utilizar un cono recto utilizamos uno *oblicuo*? ¿Podríamos obtener alguna curva que no hayamos obtenido ya al cortar a dicho cono con un plano?
2. ¿Podríamos sustituir al cono por algún otro sólido para obtener a estas curvas? ¿Qué clase de curvas nos daría una pirámide cuadrangular al intersecarla con un plano? ¿Y una pirámide heptagonal? ¿Y una pirámide cuya base tuviera cincuenta lados? ¿Y un cilindro?
3. ¿Cómo podemos trazar una elipse, una parábola o una hipérbola como trazamos una circunferencia con el compás? ¿Por qué crees que no hay "compases parabólicos" en el mercado?
4. Dados un punto $A$ en el espacio y una esfera de centro $C$ y radio $r > 0$ que no lo contiene, ¿por qué podemos asegurar que dos tangentes a la esfera desde $A$ miden lo mismo? ¿Podemos reducir este problema de geometría euclidiana del espacio a un problema de geometría plana? ¿Es cierta la afirmación que dados un punto $A$ en el plano y una circunferencia que no pasa por él, las dos tangentes a la circunferencia por $A$ miden lo mismo?
5. ¿Qué ejemplos de secciones cónicas como sombras o contornos que proyectan distintos objetos puedes hallar a tu alrededor? ¿Puedes encontrar una circunferencia? ¿Una elipse? ¿Una parábola? ¿Una hipérbola? ¿Alguna de las cónicas degeneradas?
6. Formen equipos. Tomen fotografías y hagan un álbum o una presentación electrónica donde se muestren las sombras o contornos que señalaron en el ejercicio anterior. ¿Lograron hallar todas las cónicas?

## Actividad de aprendizaje 3

Productos esperados

**Lleva a cabo lo que se pide. Recuerden que esta actividad pertenece a tu portafolio de evidencias por lo que deberás guardar tu trabajo como muestra de tu aprendizaje.**

1. Construye un cono. Puedes utilizar el cartón de la caja de cereal, plastilina, madera, cera o el material que prefieras pero que sea un cono firme.
2. Corta el cono para generar una circunferencia, una elipse, una parábola y una hipérbola.
3. Si el material que utilizaste no te permite guardar por mucho tiempo tu trabajo, documéntalo con fotografías desde que lo elaboraste. Imprime las fotografías y consérvalas en tu portafolio de evidencias.



# Los elementos de la ecuación general de las cónicas

## Análisis de la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

A lo largo del texto hemos visto cómo construir geométricamente cada una de las cónicas, asimismo hemos visto cómo asociar con la definición geométrica de cada una ecuación en forma canónica y, finalmente, vimos la relación que guarda ésta con la ecuación general de segundo grado en dos incógnitas, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Antes de seguir adelante, enfatizaremos que no nos ocuparemos en este texto de cónicas rotadas (aquellas que no son horizontales ni verticales) y, por lo tanto, el término mixto $xy$ siempre tendrá coeficiente $B = 0$. Si bien en el caso contrario ($B \neq 0$) es posible decir de qué cónica se trata considerando únicamente los coeficientes, el mostrar cómo y por qué efectivamente podemos conocer los puntos y segmentos destacados de la cónica involucra la rotación de los ejes coordenados. Esta parte de la teoría está más allá de los alcances de este libro.

Dicho lo anterior, si se nos presenta la ecuación cuadrática $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, entonces $A$ y $C$ no pueden ser ambos cero (de lo contrario la ecuación sería de primer grado). Aquí es donde comienza nuestro análisis. Los incisos siguientes recogen los casos analizados en las secciones del bloque anterior.

1. Si sólo está presente uno de los términos cuadráticos, entonces ésta representa una parábola.
   - a. Si $A = 0$, $C = 1$, $D = -2(x_0 - k_0)$, $E = -2y_0$, $F = x_0^2 + y_0^2 - k_0^2$, entonces se trata de una parábola horizontal.
   - b. El valor absoluto del coeficiente de $x$ es la medida del lado recto.
   - c. Ya que todos los términos algebraicos están del mismo lado de la igualdad, $-D$ nos indica el lado hacia el que abre la parábola: Si $-D < 0$ entonces la parábola abre hacia la izquierda; mientras que si $-D > 0$ entonces la parábola abre hacia la derecha.
   - d. La mitad del coeficiente de y con signo negativo, es decir $-E/2$, es la ordenada del foco.
   - e. Si $A = 1$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = -2(y_0 - k_1)$, $F = x_0^2 + y_0^2 - k_1^2$, entonces se trata de una parábola vertical.
   - f. En este caso, el valor absoluto del coeficiente de y es la medida del lado recto.

g. De manera análoga al caso anterior en el que todos los términos algebraicos están del mismo lado de la igualdad, $-E$ nos indicará hacia dónde abre la parábola: Si $-E < 0$ entonces la parábola abre hacia abajo; mientras que si $-E > 0$ entonces la parábola abre hacia arriba.

h. La mitad del coeficiente de $x$ con signo negativo, es decir $-D/2$, es la abscisa del foco.

2. En otro caso tendremos que tanto $A$ como $C$ son distintos de cero.

   a. Si $A = C$ (en particular ambos coeficientes tienen el mismo signo), entonces la cónica es una circunferencia. Si además $A = C = 1$, entonces $D = -2x_0$, $E = -2y_0$, $F = x_0^2 + y_0^2 - r^2$. De aquí se saca que el radio es $r \geqq 0$ y que el centro está en $(x_0, y_0)$.

   b. Si los coeficientes $A$, $C$ son distintos entre sí y ambos son positivos, entonces la cónica se trata de una elipse. El mayor de estos coeficientes nos dirá si la elipse es horizontal o vertical, teniendo en cuenta que si ambos coeficientes son negativos, hay que multiplicar toda la expresión por $-1$ antes de continuar el análisis.

   c. Si $C > A$ entonces la elipse es horizontal y los coeficientes satisfacen las relaciones: $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$, $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

   d. Si $C < A$ entonces será vertical y $A = a^2$, $C = b^2$, $D = -2a^2x_0$, $E = -2b^2y_0$, $F = a^2x_0^2 + b^2y_0^2 - a^2b^2$.

   e. En ambos casos, toda la información concerniente a la elipse (coordenadas de los focos, los vértices, excentricidad y longitudes del eje mayor y del eje menor) puede obtenerse a partir de las relaciones anteriores.

   f. Si los coeficientes $A$ y $C$ (no necesariamente distintos entre sí) tienen signos contrarios, entonces se trata de una hipérbola.

   g. El término cuadrático con el signo negativo (en este caso) nos indicará la orientación de la hipérbola. Si que $C < 0$, la hipérbola es horizontal. En el caso de una hipérbola vertical tendremos $A < 0$; de modo que el signo nos ayuda a saber en estos casos si la hipérbola es horizontal o vertical.

   h. En el caso de una hipérbola horizontal tendremos $A = b^2$, $C = -a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = 2a^2y_0$, $F = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$.

   i. En el caso de una hipérbola vertical se tendrán las siguientes relaciones entre sus coeficientes $A = -a^2$, $C = b^2$, $D = 2a^2x_0$, $E = -2b^2y_0$, $F = -a^2x_0^2 + b^2y_0^2 - a^2b^2$.

   j. Obsérvese que si multiplicamos todas las relaciones anteriores por $-1$ tendríamos $A = a^2$, $C = -b^2$, $D = -2a^2x_0$, $E = 2b^2y_0$, $F = a^2x_0^2 - b^2y_0^2 + a^2b^2$, así que inclusive si confundimos una hipérbola horizontal con una vertical intercambiando los roles que juegan $a$ y $b$, obtendríamos al final en $F$ que $-a^2b^2 = a^2b^2$, o de otro modo que, $1 = 0$ lo cual es una contradicción. Esto prueba que los conceptos de horizontal y vertical en el caso de una hipérbola no son ambiguos.

   k. Al igual que con la elipse, podemos obtener toda la información de la hipérbola conociendo los coeficientes y las relaciones anteriores, sin tener que llevar la ecuación a su forma canónica; sin embargo, si deseamos conocer las ecuaciones de las asíntotas lo más fácil es llevar la expresión a su forma canónica e igualar a cero.

3. En cualquier caso, si deseamos llevar la expresión a alguna de las formas canónicas debemos completar los cuadrados en las dos incógnitas (en el caso de la circunferencia, la elipse y la hipérbola) o en una de ellas (en el caso de la parábola).

Los casos "degenerados" de las secciones cónicas son:

1. El conjunto vacío: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = -a^2$, donde $a \neq 0$.
2. Un punto: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$.
3. Una recta "doble": $ax^2 + b(y^2 - 1) = 0$, con $a = 1$, $b = 0$, por ejemplo.
4. Un par de rectas paralelas: $ax^2 + b(y^2 - 1) = 0$, con $a = 0$, $b = 1$, por ejemplo.
5. Un par de rectas que se intersecan en un único punto: $(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0$.

Estos casos pueden presentarse al llevar la ecuación de la cónica a su forma canónica y ocurren, respectivamente, como casos particulares de una circunferencia cuyo radio es negativo o cero (incisos 1 y 2), una elipse en la que alguno de sus ejes creció sin límite (incisos 3 y 4) y una hipérbola que degeneró en sus asíntotas (inciso 5).

## Actividad de aprendizaje 4

**Realiza lo siguiente.**

1. Di qué cónica representa cada una de las expresiones algebraicas. Posteriormente da toda la información relevante sobre ella:

   a. $2x^2 + 5y^2 - 8x + 10y - 37 = 0$.

   b. $y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$.

   c. $x^2 + 1 = 0$.

   d. $3x^2 - 4y^2 + 6x - 4y - 16 = 0$.

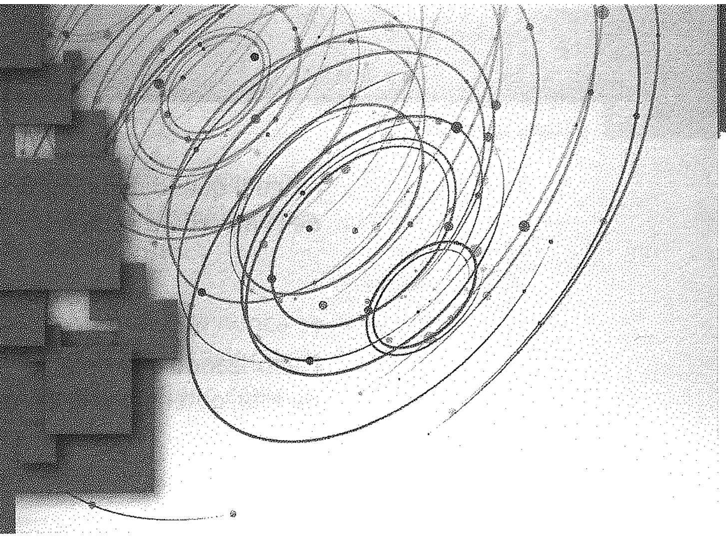
2. La ecuación cuadrática $4x^2 + a(y^2 - 1) = 0$ representa una familia de cónicas que varían en función del valor que toma el parámetro a. Con base en la información de este capítulo, llena la siguiente tabla diciendo de qué cónica se trata en cada caso.

| Valor de $a$. | Cónica que representa la expresión $4x^2 + a(y^2 - 1) = 0$ |
|---|---|
| $a < 0$ | |
| $a = 0$ | |
| $a > 0$ | |

Esboza en tu cuaderno algunas cónicas de esta familia (para los valores $a = -1, -1/2, 0, 1/2, 1$) ¿observas algo en particular? ¿Cuáles son los puntos de intersección de las cónicas? Comenta tus observaciones con el docente y tus compañeros.

3. En este caso, el valor absoluto del [illegible]

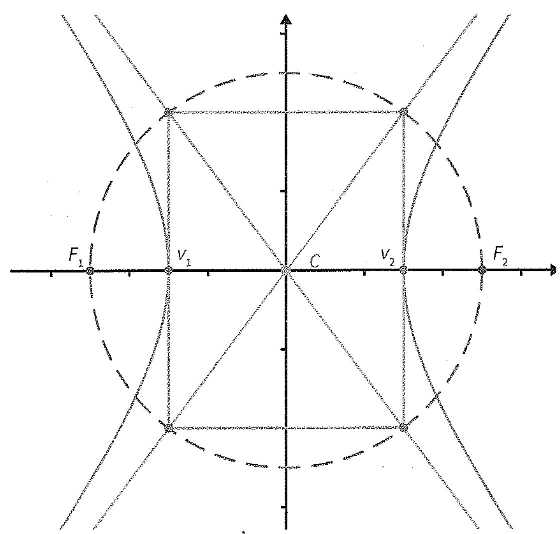
# Los puntos en el plano de una parábola, una circunferencia, una elipse y una hipérbola



## Asíntotas

Como mencionamos en el apartado dedicado a los puntos y segmentos destacados en la hipérbola, si tenemos una cónica de este tipo, con forma canónica dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$




sabemos que se trata de una hipérbola horizontal con centro en $(x_0, y_0)$. Si escribimos las coordenadas de los focos de esta hipérbola como $(x_0 \pm c, y_0)$ y trazamos la circunferencia con radio $c > 0$ y centro en $(x_0, y_0)$, por el teorema de Pitágoras y la definición que dimos anteriormente de $b^2 = c^2 - a^2$, vemos que el segmento perpendicular al eje transverso que se levanta desde el vértice define una cuerda que mide exactamente $2b$.

Podemos por lo tanto, conocer las pendientes de las rectas que pasan por el centro de la hipérbola y que aparecen como diagonales del cuadrilátero inscrito en la circunferencia anterior. Una será positiva y la otra negativa, toda vez que una es creciente y la otra decreciente:

$$m=\pm\frac{b}{a}.$$

Con esto es posible escribir las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola:

$$y=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)+y_0.$$

Al igual que lo mencionamos anteriormente, si despejamos $y$ de la ecuación canónica de la hipérbola anterior:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x-x_0)^2-a^2}+y_0\,.$$

Factorizando el término $(x-x_0)^2$ que aparece en interior de la raíz cuadrada y sacándolo de esta, obtenemos la expresión algebraica:

$$y=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)\sqrt{1-\frac{a^2}{(x-x_0)^2}}+y_0$$

(No es necesario preocuparnos por el valor absoluto de la expresión $x-x_0$ cuando esta sale de la raíz, los signos que podría tomar dicha expresión ya están representados en la igualdad).

Si hacemos que la variable $x$ tome valores cada vez mayores (por ejemplo, si nos encontramos en la rama derecha de la hipérbola), la expresión $\frac{a^2}{(x-x_0)^2}$ se hará cada vez más pequeña ya que el númerador $a^2$ está fijo y es distinto de cero. De este modo la expresión $1-\frac{a^2}{(x-x_0)^2}$ se aproximará cada vez más a 1 y la igualdad anterior se parecerá cada vez más a:

$$y=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)+y_0\,,$$

que es precisamente la pareja de ecuaciones que representan a las asíntotas. Intuitivamente podemos afirmar que conforme $x$ toma valores cada más grandes y la variable dependiente $y$ se mueve a lo largo de la hipérbola, la rama correspondiente de la hipérbola se aproxima a la asíntota correspondiente. Si para el *mismo* valor $x'$ denotamos por $y_a$ al valor correspondiente en la asíntota con pendiente positiva y por $y_h$ al valor correspondiente en la hipérbola, entonces la **distancia** entre los puntos estará dada por:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x'-x')+(y_a-y_h)^2}&=y_a-y_h\\&=\frac{b}{a}(x'-x_0)\left(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{(x'-x_0)^2}}\right).\end{aligned}$$

Pero como ya mencionamos, al aumentar indiscriminadamente el valor de $x'$, el valor de la expresión $\sqrt{1-\frac{a^2}{(x'-x_0)^2}}$ se aproxima más y más a 1, de manera que el valor de la resta que aparece entre llaves, es decir, $1-\sqrt{1-\frac{a^2}{(x'-x_0)^2}}$ se hace cada vez menor. Esto suele interpretarse diciendo que la diferencia entre las ordenadas en la asíntota y en la hipér-

Contesta lo siguiente:

1. La ecuación general de una parábola es $y^2-4y+4+12x-12=0$, ¿cuál es su foco?
   a. (2, 2)
   b. (−2, −2)
   c. (2, −2)
   d. (−2, 2)
2. ¿Cuál es el parámetro focal de la parábola cuya ecuación es $y=0.25x^2-x+2$?
   a. 2
   b. 4
   c. 8
   d. 16
3. Una parabola cuya ecuación es $y=0.5x^2-2x+4$, tiene como directriz la expresión:
   a. $y=0$
   b. $y=0.5$
   c. $y=1$
   d. $y=1.5$

bola, $y_a - y_h$, también se vuelve cada vez **menor** conforme $x'$ aumenta. Intuitivamente, dicha diferencia será **cero** cuando $x'$ sea **mayor que cualquier cantidad imaginable** o, dicho de otra manera, la hipérbola intersecará a sus asíntotas en el **infinito**.

Lo anterior no significa que la abscisa $x'$ tome un valor infinito, ya que este nunca se alcanza; sino que conforme el valor de $x'$ aumenta tanto como se desee, el valor de la diferencia entre las ordenadas correspondientes, $y_a - y_h$, se hace tan pequeño como se quiera.

## Actividad de aprendizaje 5

**Encuentra las ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas.**

1. $25x^2 - 49y^2 - 1305 = 0$
2. $-9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y + 54 = 0$
3. $xy = 1$. [Sugerencia: haz un dibujo de esta hipérbola.]

## Actividad de aprendizaje 6

Productos esperados

**En una hoja (o más) de papel milimétrico registra todas tus respuestas a la siguiente actividad. Después guárdala en tu portafolio de evidencias.**

Considera la hipérbola horizontal con centro en (−2, 1), vértices en (−5, 1) y (1, 1); así como focos en (−7, 1) y (3, 1).

1. Encuentra la ecuación canónica de la hipérbola.
2. Da la ecuación de sus asíntotas.
3. Con la información que posees sobre la hipérbola y para un valor fijo de la abscisa $x' > 0$, encuentra la expresión que representa la diferencia $y_a - y_h$, entre las ordenadas correspondientes a la asíntota con pendiente positiva y a la parte superior de la rama derecha de la hipérbola.
4. Con base en la expresión que encontraste en el inciso anterior, copia y completa la siguiente tabla haciendo uso de tu calculadora y dando cuatro decimales o más, hasta alcanzar la primera cifra distinta de cero. ¿Qué ocurre con el valor de la diferencia $y_a - y_h$? ¿Dirías que la asíntota y la hipérbola se cortan? Justifica tu respuesta.

| Valor de $x'$ | Valor de $y_a - y_h$ |
|---|---|
| 10 | |
| 100 | |
| 1 000 | |

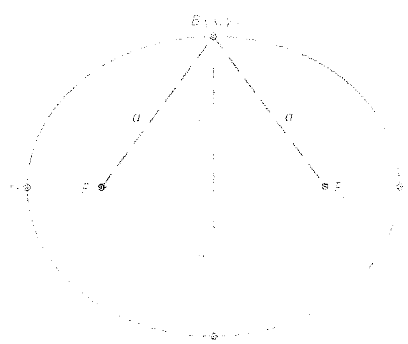
### Hacia Planea

Contesta lo siguiente:

1. La ecuación general de una parábola es $y^2 - 4y + 4 + 12x - 12 = 0$, ¿cuál es su vértice?
   a. (1, 2)
   b. (1, −2)
   c. (1, −1)
   d. (2, 2)
2. ¿Cuál es la directriz de la parábola cuya ecuación es $y = 0.25x^2 - x + 2$?
   a. $y = 0$
   b. $y = 0.5$
   c. $y = 1$
   d. $y = 1.5$
2. Una parabola cuya ecuación es $y = 0.5x^2 - 2x + 4$, tiene como parámetro focal:
   a. 0
   b. 0.5
   c. 1
   d. 1.5

| Valor de $x^2$ | Valor de $y_a - y_h$ |
|---|---|
| 10 000 | |
| 100 000 | |
| 1 000 000 | |

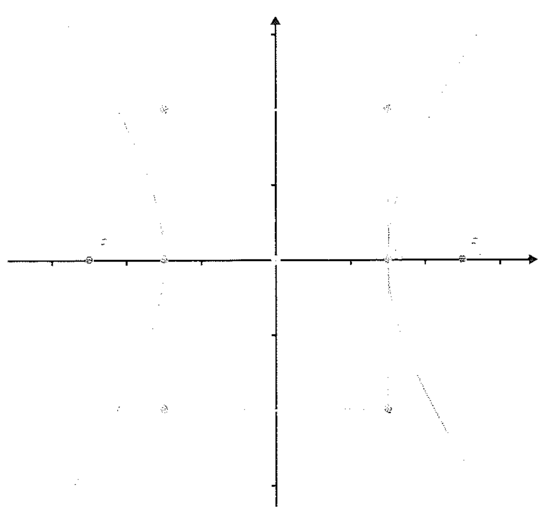
## Excentricidad



Al estudiar la elipse vimos una relación existente entre los semiejes mayor y menor que llamamos **excentricidad**. Recuerda que $a$, el semieje mayor, es la distancia que hay del centro a (cualquier) vértice de la elipse y que el semieje menor, $b$, está definido por la expresión $b=\sqrt{a^2-c^2}$ , donde $c$ es la distancia del centro a (cualquier) foco de la elipse.

La excentricidad se define entonces, como el cociente entre $c$ y $a$:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\ .$$



Mencionamos también que cuando $c = 0$, los focos y el centro coinciden. En este caso tenemos una circunferencia y la excentricidad es cero. La excentricidad, definida de esta manera, es una medida de qué tanto se aleja una elipse de ser una circunferencia.

Cuando $b$ se aproxima a cero, la elipse (si es horizontal) se achata en sus extremos superior e inferior y esto implica que las magnitudes $a$ y $c$ cada vez se parecen más. Esto se debe a que conforme se deforma la elipse, cada foco se aproxima cada vez más a su correspondiente vértice y si $b$ se hace cero, entonces $c = a$ y la excentricidad es uno. En este caso tenemos una de las secciones cónicas degeneradas.

Por todo lo anterior, habíamos establecido que la excentricidad satisfacía las desigualdades $0 \leq e \leq 1$.

Sin embargo, las hipérbolas también son susceptibles de un análisis similar ya que poseen, análogamente, vértices y focos; sólo que en este caso, cada uno de los vértices en el eje transverso está más cerca del centro de la hipérbola que los focos.

En consecuencia tenemos $b=\sqrt{c^2-a^2}$ , o de manera equivalente, $c=\sqrt{b^2+a^2}$ . De esta manera la excentricidad adoptará la expresión:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}\ .$$

De este modo observamos que al ser $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \geq 0$ , la excentricidad de una hipérbola satisface la desigualdad $e \geq 1$. El caso en el que $b = 0$ se presenta cuando la hipérbola degenera sobre su eje transverso y, nuevamente, tenemos el caso de una sección cónica degenerada.

Observa que en el caso de las hipérbolas, la excentricidad no tiene cota superior. Por lo tanto es posible hallar hipérbolas con excentricidades tan grandes como se desee. Asimismo, dado que las parábolas no poseen un centro, no tiene sentido tratar de definir una noción de excentricidad para estas secciones cónicas.

Por último, mencionaremos que algunos textos llaman **excentricidad lineal** a lo que aquí hemos definido y llamado simplemente "excentricidad". Esto se debe a que en textos más avanzados de geometría analítica se hace uso de otra definición la cual sí es aplicable a las parábolas; sin embargo, estos aspectos caen fuera del alcance del presente curso y sólo usaremos la definición que nosotros dimos de excentricidad.

## **Actividad** de aprendizaje 7

**Da el valor de la excentricidad para las siguientes secciones cónicas. En los casos donde no se trata de una elipse o de una hipérbola escribe N/A o "no aplica".**

1. $16x^2 - 9y^2 - 128x + 18y + 103 = 0$
2. $49x^2 + 36y^2 + 98x - 1715 = 0$
3. $9x^2 - 6x + y - 8 = 0$
4. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 4y - 11 = 0$
5. $8x^2 + 8y^2 + 4x - 8y + 5 = 0$
6. $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 12 = 0$
7. $-25x^2 + 144y^2 - 864y - 2304 = 0$
8. $x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$
9. $36x^2 + 36y^2 + 24x - 36y - 311 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 8x + 27 + 17 = 0$

**11.** $-4x^2+y^2-16x+2y-19=0$

**12.** $4x^2+y^2-16x+2y-19=0$

**13.** $y^2-16x+2y-19=0$

**14.** $25x^2-49y^2-1305=0$

**15.** $9x^2+12xy+4y^2-9=0$. [Sugerencia: reconoce el trinomio cuadrado perfecto.]

## Bosquejo de cónicas conociendo algunos elementos

En esta sección vamos a revisar cómo bosquejar secciones cónicas a partir de algunos elementos que identifiquemos de sus ecuaciones.

La regla general es que si tenemos alguna de las formas canónicas:

| Ecuación | Cónica que representa |
|---|---|
| $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ | Circunferencia con centro en $(x_0, y_0)$ y radio $r \geqq 0$ |
| $(y-y_0)^2=2(x_0-k_0)x+k_0^2-x_0^2$ | Parábola con foco $F=(x_0, y_0)$ y directriz $x=k_0$ |
| $(x-x_1)^2=2(y_1-k_0)y+k_0^2-y_1^2$ | Parábola con foco $F=(x_1, y_1)$ y directriz $y=k_0$ |
| $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ | Elipse horizontal con centro en $(x_0, y_0)$, semieje mayor $a>0$ y semieje menor $b>0$ |
| $\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ | Elipse vertical con centro en $(x_0, y_0)$, semieje mayor $a>0$ y semieje menor $b>0$ |
| $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ | Hipérbola horizontal con centro en $(x_0, y_0)$, distancia a cualquier vértice $a>0$ y semieje conjugado $b>0$ |
| $-\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ | Hipérbola vertical con centro en $(x_0, y_0)$, distancia a cualquier vértice $a>0$ y semieje conjugado $b>0$ |

En estos casos, lo más sencillo es empezar ubicando en el plano los elementos con los que contamos y, a partir de ellos obtener los restantes, como se indica en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo

Esbozaremos la cónica dada por la ecuación $(y-3)^2 = -8x + 8$.

En este caso tenemos una forma canónica: se trata de una parábola horizontal con $y_0 = 3$. Para conocer los elementos restantes debemos resolver de manera simultánea $2(x_0 - k_0) = -8$, $k_0^2 - x_0^2 = 8$.

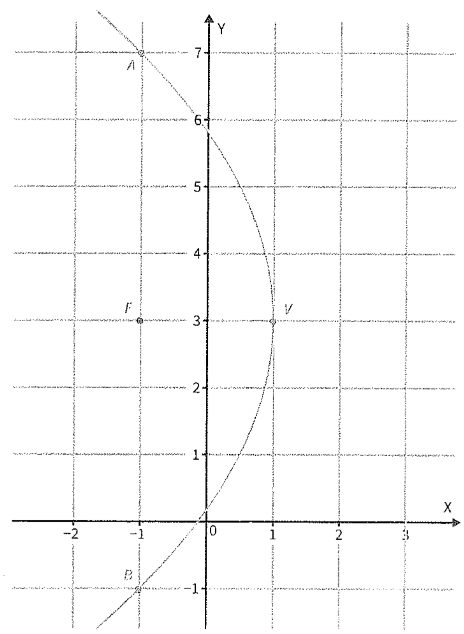
La segunda ecuación podemos escribirla como $(x_0 - k_0)(x_0 + k_0) = -8$, de modo que si igualamos ambas ecuaciones obtendremos:

$$(x_0 - k_0)(x_0 + k_0) = 2(x_0 - k_0).$$

Dado que $x_0 - k_0 \neq 0$, al cancelar este factor de ambos lados de la igualdad obtendremos $x_0 + k_0 = 2$ que, junto con la ecuación, $x_0 - k_0 = -4$ nos permite obtener $x_0 = -1$, $k_0 = 3$. De modo que la parábola tiene su foco en $(-1, 3)$, directriz en $x = 3$ y abre hacia la izquierda del plano. Dado que la longitud del lado recto es el valor absoluto de $-8$, la curva pasará por los puntos $A = (-1, 7)$ y $B = (-1, -1)$.

Asimismo, el vértice estará a medio camino entre el foco y la directriz, es decir, estará en el punto $(1, 3)$.

Con toda esta información podemos esbozar la curva.




La pauta a seguir cuando se nos presente una ecuación cuadrática $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde no aparezca uno de los términos cuadráticos es primero identificar si se trata de una parábola horizontal. Si $A = 0$, entonces estaremos en dicho caso y, a partir de la información proporcionada por el resto de los coeficientes (es decir, $C = 1$, $D = -2(x_0 - k_0)$, $E = -2y_0$, $F = x_0^2 + y_0^2 - k_0^2$), podremos obtener los elementos correspondientes para esbozar la parábola respectiva, que por lo general serán el foco, la directriz, el vértice y los puntos en que el lado recto corta a la curva.

En el siguiente ejemplo trataremos el caso de una cónica central.

### Ejemplo

Esbozaremos la cónica dada por la ecuación $25x^2 - 49y^2 - 50x - 196y - 1400 = 0$.

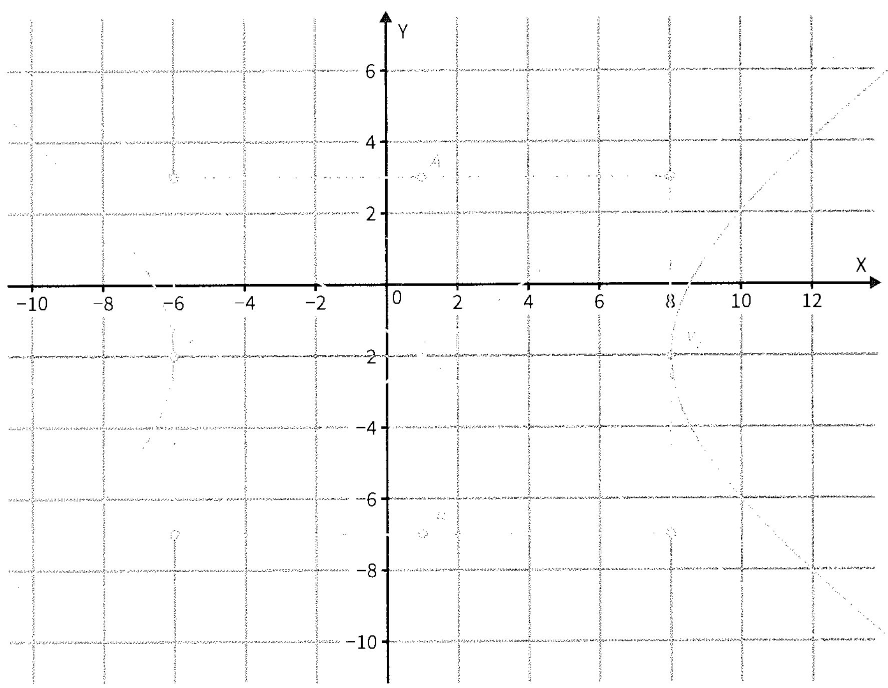
Dado que aparecen ambos términos cuadráticos con signos opuestos, sabemos que se trata de una hipérbola; pero que el término independiente y el coeficiente de $y^2$ sean negativos, indica que la curva es horizontal.

En semejante caso, nuestro análisis de la ecuación cuadrática $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ dio la información siguiente $A = b^2$, $C = -a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = 2a^2y_0$, $F = b^2x_0^{\,2} - a^2y_0^{\,2} - a^2b^2$. De modo que obtenemos los valores $b = 5$, $a = 7$ con los que trazaremos un rectángulo cuyas diagonales serán las asíntotas de la hipérbola; sin embargo debemos saber *antes* dónde se intersecan dichas asíntotas.

Dicha información se obtiene de los coeficientes $D$ y $E$. En nuestro caso tenemos $D = -2b^2x_0 = -50$, $E = 2a^2y_0 = -196$. Sustituyendo los valores de $a$ y $b$ se tiene $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, lo que nos da las coordenadas del centro.

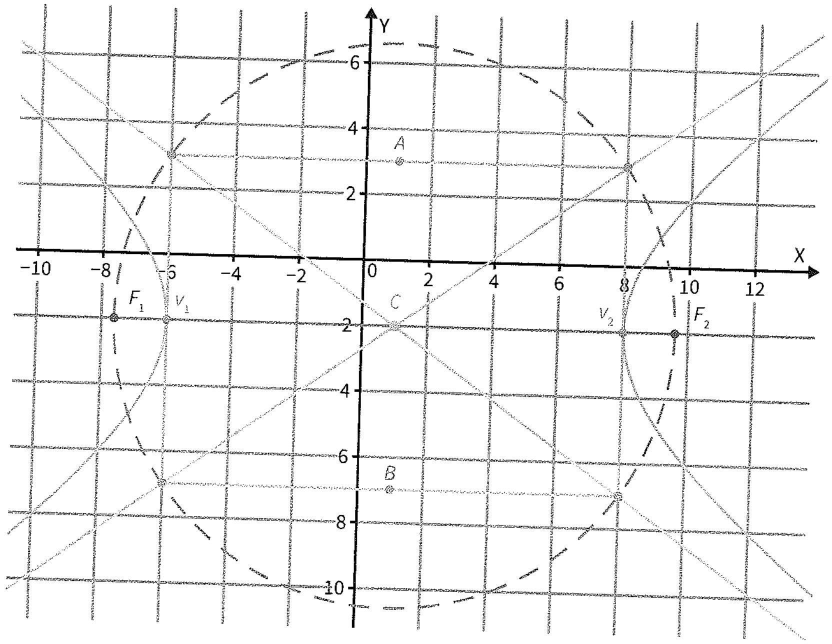
A partir de todo lo anterior podemos encontrar las coordenadas de ambos vértices: $V_1 = (-6, -2)$ y $V_2 = (8, -2)$. También podemos encontrar los puntos $A = (1, 3)$ y $B = (1, -7)$ que delimitan el eje transverso.

A continuación, trazaremos líneas paralelas a los ejes coordenados: las paralelas al eje X pasarán por $A$ y $B$, las paralelas al eje y lo harán por $V_1$ y $V_2$. Encontraremos cuatro puntos de intersección de estas rectas que son los cuatro vértices del rectángulo buscado. Con estos elementos ya podemos trazar las asíntotas y, saliendo de los vértices y aproximando la curva a éstas, podemos esbozar la hipérbola en cuestión.




Si deseamos encontrar los focos en el dibujo es muy sencillo: basta con trazar el eje transverso que une los vértices y dibujar una circunferencia con centro en (1, −2) y cuyo radio sea la mitad de cualquier diagonal del rectángulo determinado por las asíntotas. Los puntos de intersección de la circunferencia con el eje transverso son los focos de la hipérbola. Para encontrar sus coordenadas lo mejor es usar los métodos analíticos de las secciones previas.

El trazo final luce como la siguiente imagen.




El caso de la elipse es completamente análogo al de la hipérbola. Únicamente debemos encontrar el rectángulo determinado por los ejes mayor y menor e inscribir la elipse en él a partir de los vértices.

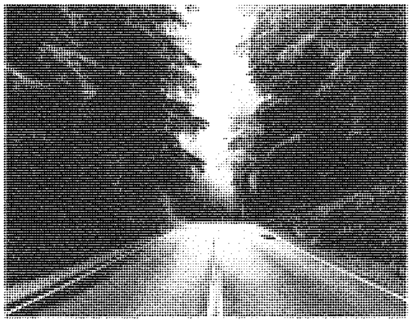
Si se nos da el tipo de cónica, algún vértice, foco o directriz; entonces debemos empezar trazando ese elemento en el plano y a partir de él explotar las simetrías y las propiedades con que se definió geométricamente a cada una de las curvas.

## Actividad de aprendizaje 8

**Esboza en tu cuaderno cada una de las siguientes cónicas, señalando los elementos que utilizaste para hacerlo.**

1. La hipérbola con centro en $(-1, 1)$, uno de sus focos en $(-1, 6)$ y uno de sus vértices en $(-1, 5)$.
2. La elipse con focos en $(1, 1)$ y $(-5, 1)$ y uno de sus vértices en $(-6, 1)$.
3. La parábola con vértice en $(0, -2)$ y directriz $y = 0$.
4. La cónica cuya ecuación es $x^2 - 4y^2 - 16x + 2y - 19 = 0$.
5. La cónica cuya ecuación es $9y^2 + x - 6y - 8 = 0$.
6. La cónica cuya ecuación es $16y^2 + x - 12y - 32 = 0$.
7. La cónica cuya ecuación es $16y^2 + x + 12y + 32 = 0$.
8. La cónica cuya ecuación es $9y^2 + x + 6y + 8 = 0$.

## Suma anécdota



Las ecuaciones de un par de rectas paralelas tienen la misma pendiente y, si son rectas distintas, su término independiente será diferente. Como sabemos, estas rectas no se intersecarán en ningún punto del plano; sin embargo ¿te imaginas qué ocurriría si asociáramos con la pendiente común a ambas un punto "ideal" donde las rectas se cortaran? Este punto no podría ser parte del plano euclidiano que hemos utilizado hasta aquí, así que deberíamos ubicarlo más allá de cualquier punto imaginable: sería un punto "al infinito" (correspondiente a la pendiente común a las rectas paralelas). Algo similar a lo que ocurre con los rieles en las vías del tren que se pierden en el horizonte.

Naturalmente, familias *diferentes* de rectas paralelas (unas con pendiente $m_1$ y otras con pendiente $m_2$) definirían puntos "al infinito" distintos (de lo contrario tendríamos $m_1 = m_2$ y ambas familias formarían una sola clase asociada con la misma pendiente). Dado que queremos conservar el postulado que cualesquiera dos puntos distintos determinan una única recta, la recta definida por estos dos puntos "al infinito" distintos sería a su vez una recta "ideal". Dicha recta constaría por completo de puntos "al infinito" y sería justo llamarla la recta "al infinito".

Esta geometría "descabellada" fue concebida por un ingeniero militar y matemático del ejército francés (durante la época de Napoleón) que participó en la invasión francesa de Rusia y cuyo nombre era Jean-Victor Poncelet. Entre 1813 y 1814, Poncelet fue prisionero de guerra de los rusos y decidió pasar su cautiverio desarrollando este nuevo tipo de geometría a la que daría el nombre de "proyectiva".

Al quedar en libertad, Poncelet regresó a Francia y publicó sus descubrimientos en su "Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras" (1822). Entre otras cosas, en la geometría proyectiva sólo existe una cónica (que se ve como un óvalo). El tipo de cónica del que se trata (elipse, parábola o hipérbola) queda determinado por la forma en que la recta "al infinito" corta (o no) a la cónica:

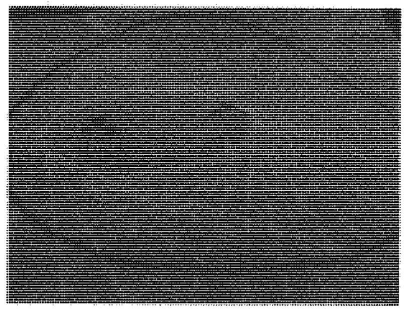
- Si no la corta se trata de una elipse.
- Si es tangente se trata de una parábola.
- Si la corta se trata de una hipérbola.

En la imagen Ω es una cónica proyectiva: si la recta e es la recta "al infinito", entonces estaríamos viendo una elipse; pero si la recta t lo fuera (que es tangente en *P*) entonces estaríamos viendo una parábola. Si *s* fuera la recta al "infinito", entonces Ω sería una hipérbola y justamente en *P* ¡intersecaría a una de sus asíntotas! ¡Genial! ¿No crees?

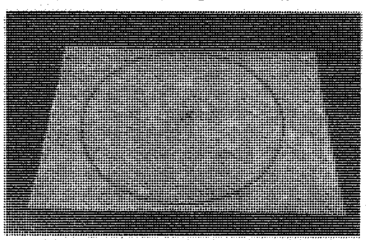
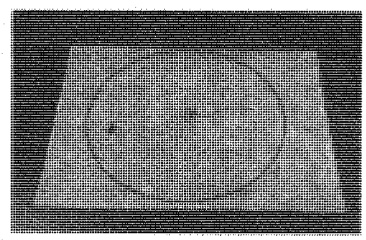
# Proyecto integrador

**Es el final del tercer parcial y deberás poner en práctica tus conocimientos.**

Construir una parábola doblando papel.



1. Organícense en equipos.
2. Consigan hojas de papel albanene o papel arroz. En su defecto, pueden utilizar mica o cualquier material flexible y traslúcido.
3. Lleven a cabo los siguientes pasos.

| | |
|---|---|
| Marquen un punto $F_1$ y tracen una circunferencia con centro en él.  | Marcar otro punto $F_2$ dentro de la circunferencia.  |
| Doblen la hoja de tal manera que el punto $F_2$ coincida con la circunferencia.  | Repitan a lo largo de la circunferencia.  |

Deberán obtener algo similar a la imagen del inicio.

4. Elaboren un reporte en el que respondan las preguntas siguientes. Incluyan sus hojas con los trazos.
   a. ¿Por qué esos dobleces forman una elipse?
   b. ¿Qué nombre recibe el conjunto de líneas tangentes que forman a la parábola?

## Evalúa tus evidencias

**Utiliza la lista de cotejo para identificar lo que dominas con base en las evidencias generadas y guardadas en tu portafolio.**

| Productos | Criterios | Sí | No |
|---|---|---|---|
| Trazar en un cono recto los cortes para encontrar una circunferencia, una elipse, una parábola y una hipérbola.<br>Actividad 3. | Trabajo correcta y limpiamente con el modelo elegido. | | |
| | Realizo los cortes con precisión y se nota claramente la sección resultante. | | |
| | Documento correctamente el trabajo, identificando las partes importantes en cada corte y su resultado. | | |
| Determinar la asíntota de una hipérbola dada y argumentar si se cruzan ambos lugares geométricos.<br>Actividad 17. | Encuentro la ecuación canónica solicitada. | | |
| | Hallo correctamente las asíntotas pedidas. | | |
| | Completo la tabla de manera satisfactoria y aplico los conceptos vistos en la actividad. | | |

## Rúbrica

Con base en la rúbrica, identifica tu nivel logrado en cada aprendizaje esperado. Recuerda repasar los temas para mejorar.

| Aprendizajes esperados | Básico | Autónomo | Estratégico |
|---|---|---|---|
| Dibujar un cono y visualizar cortes prototípicos (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola). | Identifico los cortes necesarios para generar cada sección cónica. | Ubico los puntos comunes de los planos y el cono necesarios para generar las secciones. | Relaciono la orientación del plano con el corte del cono y las características de la figura resultante. |
| Analiza los elementos y la estructura de la ecuación de segundo grado para las cónicas. | Identifico el lugar geométrico correspondiente a cada ecuación general. | Reconozco el discriminante y lo interpreto para cada caso. | Interpreto los elementos desde la ecuación general y reconozco sus propiedades más importantes. |

En Book Mart nos ocupamos de proporcionar a nuestros clientes paquetes integrales de soluciones didácticas; por ello, nuestros libros de texto se acompañan de un conjunto completo de herramientas cuyo objetivo es contribuir a la optimización del proceso de aprendizaje en los estudiantes. Estos materiales se enfocan en ofrecer opciones auténticas que se adaptan a todos los estilos de aprendizaje y al desarrollo de competencias en todas las áreas del conocimiento. Hoy más que nunca, es de vital importancia ofrecer una propuesta didáctica desafiante y atractiva, que logre superar la tendencia a la deserción, apegada por completo a los lineamientos de nuestro sistema educativo nacional y con materiales de la mejor calidad.

Estudiantes y facilitadores encuentran un gran apoyo en nuestros materiales didácticos integrales que incluyen lo siguiente:

**Libro del estudiante**

- Aplicación gratuita para teléfono móvil

**Guía del docente**

- Respuestas del libro

**CD para el docente**

- Planeación argumentada
- Lecturas adicionales
- Actividades adicionales
- Reactivos de evaluación adicionales
- Información básica para el docente actual de Educación Media Superior
- Propuesta metodológica
- Orientación para la evaluación docente para la permanencia
- Sugerencias para proyectos transversales
- El problema actitudinal (Construye T)
- Recursos innovadores



www.bookmart.com.mx
Lada nacional sin costo
01 800 101 63 48

ISBN: 978-607-743-873-1
9 786077 438731